F 1503/3

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XIX (XXIII)

Fasc. 1–2

SECŢIA III ELECTROTEHNICĂ
ELECTRONICĂ
AUTOMATIZĂRI

1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XIX (XXIII)

Fasc. 1–2

SECŢIA III ELECTROTEHNICĂ
ELECTRONICĂ
AUTOMATIZĂRI

1973

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. em. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

III. ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

Prof. dr. doc. N. V. BOȚAN
Prof. dr. ing. D. BĂRBULESCU
Prof. dr. ing. L. SEBASTIAN

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. HUGO ROSMAN (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2 1973

Secția III

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

SUMAR

Pag.

GH. VASILIU, Magnetometru cu ferosondă cu o singură cale magnetică (franc., rez. rom.) 9

GH. SAVIN, NORBERT ZITRON și DANA BALAN, Bobina neliniară comandată în scheme de multiplicare a frecvenței (germ., rez. rom.) 13

HUGO ROSMAN, Asupra unei generalizări a relațiilor Manley-Rowe (engl., rez. rom.) 29

SAVEL MITREA, Sinteza multiplicatoarelor de frecvență rezistive (engl., rez. rom.) 39

NORBERT ZITRON și ILIE POPESCU, Asupra unor diagrame-loc geometric în circuite multiferorezonante (germ., rez. rom.) 47

CAMELIA ANDRONE, Studiul unui modulator magnetic cu ieșirea pe frecvența fundamentală (rom., rez. engl.) 53

M. ANTONESCU, Considerații analitice privind caracteristicile bobinelor neliniare comandate prin reacție (engl., rez. rom.) 63

HARI HERȘCOVICI și EMIL LUCA, O nouă metodă de interpretare a unor fenomene electronice din joncțiunea semiconductoare abruptă PN (franc., rez. rom.) 69

D. BĂRBULESCU și NONEL THIRER, Wattmetru-varmetru cu diode semiconductoare pentru măsurarea puterilor mici (rom., rez. franc.) 85

LAURIAN PREDA și EUGENIU VOINEA, Posibilități de măsurare a puterii de nesimetrie în centralele și stațiile electrice cu ajutorul unor echipaje ce folosesc neutrul artificial (rom., rez. franc.) 95

Pag.

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH și MIRCEA GUȘĂ, Asupra transmisiei tensiunii de impuls în transformatorul cu două înfășurări (rom., rez. franc.) 103

AUREL DOBRANIȘ și RĂZVAN MĂGUREANU, Alegerea tipului de regulator al excitației transversale a mașinii sincrone cu excitație pe două axe (engl., rez. rom.) 119

EMIL TEODORU, Cu privire la posibilitatea comandării circulației puterii între treptele unui motor cu rotor dublu (rom., rez. engl.) 129

VALERIU MUNTEANU și LEOPOLD SEBASTIAN, Asupra echivalenței structurilor sistemelor automate nestaționare bazată pe o nouă interpretare a aplicării unui operator diferențial liniar asupra altui operator diferențial liniar (II) (rusă rez. rom.) 135

EUGEN BALABAN, CORNELIU BOȚAN, MIRCEA DIACONESCU, N. V. BOȚAN și LEOPOLD SEBASTIAN, Considerații experimentale asupra posibilităților de reglare a unui sistem de acționare cu grup motor asincron—motor asincron cu stator mobil (rusă, rez. rom.) 141

CORNELIU HUȚANU și N. V. BOȚAN, Posibilități de utilizare a autodinei în acționările electrice cu mașini de curent alternativ (rom., rez. rusă) 149

LEOPOLD SEBASTIAN și CORNELIU BOȚAN, Înlăturarea autooscilațiilor servomecanismelor de tip releu prin alegerea corespunzătoare a raportului de transmisie al reductorului (rom., rez. franc.) 159

IOSIF OLÁH și RODICA OLÁH, Traductor de deplasare liniară sensibil la sensul deplasării (engl., rez. rom.) 169

MIRCEA DIACONESCU, I. ȚIȚARIU și GH. SAVITESCU, Dispozitiv de măsură a unghiului intern la motoare sincrone (germ., rez. rom.) 177

ZAIRA MURGU, Studiul energeticii procesului de pornire al motoarelor de curent continuu cu ajutorul calculatoarelor analogice (engl., rez. rom.) . 183

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIX (XXIII), Fasc. 1—2 1973

Section III

ELECTROTECHNICS. ELECTRONICS. AUTOMATION

CONTENTS

Pp.

GH. VASILIU, Magnétomètre à ferrosonde avec une seule voie magnétique (French, Romanian summary) 9

GH. SAVIN, NORBERT ZITRON und DANA BALAN, Die nichtlineare gesteuerte Spule in Schaltungen von Frequenzvervielfachern (German, Romanian summary) 13

HUGO ROSMAN, On a Generalization of the Manley-Rowe Relations (English, Romanian summary) 29

SAVEL MITREA, Synthesis of Resistive Frequency Multipliers (English, Romanian summary) 39

NORBERT ZITRON und ILIE POPESCU, Über einige geometrische Ortskurven bei vielfachen Ferroresonanzkreisen (German, Romanian summary) 47

CAMELIA ANDRONE, Analysis of the Magnetic-First-Harmonic-Modulator (Romanian, English summary) 53

M. ANTONESCU, Analytical Considerations concerning the Characteristics of Feedback-Controlled Nonlinear Reactors (English, Romanian summary) 63

HARI HERŞCOVICI et EMIL LUCA, Une nouvelle interprétation de quelques phénomènes électroniques de la jonction semi-conductrice abrupte PN (French, Romanian summary). 69

D. BĂRBULESCU et NONEL THIRER, Wattmètre-varmètre à diodes sémiconductrices, pour la mesure des petites puissances (Romanian, French summary) 85

Pp.

LAURIAN PREDA et EUGENIU VOINEA, Possibilités de mesure de la puissance de déséquilibre dans les centrales et stations électriques à l'aide d'équipages qui utilisent le neutre artificiel (Romanian, French summary) 95

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH et MIRCEA GUȘĂ, Sur la transmission de l'onde de choc dans le transformateur à deux enroulements (Romanian, French summary) 103

AUREL DOBRANIȘ and RĂZVAN MAGUREANU, The Choice of *Q*-Axis Excitation Regulator for the Divided-Winding Synchronous Generators (English, Romanian summary) 119

EMIL TEODORU, About the Possibility of Controlling the Power Flow between the Section of Double-Rotor-Motor (Romanian, English summary) . 129

VALERIU MUNTEANU et LEOPOLD SEBASTIAN, Équivalence des structures des systèmes automatiques nonstationnaires basée sur une nouvelle interprétation de l'application d'un opérateur différentiel linéaire sur un autre opérateur différentiel linéaire (II) (Russian, Romanian summary) 135

EUGEN BALABAN, CORNELIU BOȚAN, MIRCEA DIACONESCU, N. V. BOȚAN et LEOPOLD SEBASTIAN, Considérations expérimentalles concernant les possibilités de réglage d'un système de commande constitué par le groupe moteur asynchrone—moteur asynchrone à stateur mobile (Russian, Romanian summary) 141

CORNELIU HUȚANU and N. V. BOȚAN, Possibilities of Using the Autodyne for C. A. Electrical Drives (Romanian, Russian summary) . . 149

LEOPOLD SEBASTIAN et CORNELIU BOȚAN, Choix du rapport de transmission du réducteur d'un servomécanisme à relais en vue d'assurer l'élimination des oscillations libres (Romanian, Russian summary) . 159

IOSIF OLÁH and RODICA OLÁH, A Transducer capable of Tensing the Direction of Mechanical Linear Movement (English, Romanian summary) 169

MIRCEA DIACONESCU, I. ȚIȚARIU und GH. SAVITESCU, Vorrichtung zur Winkelmeßung bei Synchronmotoren (German, Romanian summary) 177

ZAIRA MURGU, Study of the Energetics of the D. C. Motor Starting Process with the Help of an Analogue Computer (English, Romanian summary) 183

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIX (XXIII), Вып. 1–2 1973

Секция III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА. АВТОМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Г. ВАСИЛИУ, Феррозондный магнитометр с одним магнитным путем (франц., рез. рум.)	9
Г. САВИН, НОРБЕРТ ЦИТРОН и ДАНА БАЛАН, Управляемая нелинейная катушка в схемах умножения частоты (нем., рез. рум.)	13
ГУГО РОСМАН, Об обобщении соотношения Мэнли-Роу (англ., рез. рум.)	29
САВЕЛ МИТРЯ, Синтез резистивных умножителей частоты (англ., рез. рум.)	39
НОРБЕРТ ЦИТРОН и ИЛИЕ ПОПЕСКУ, К геометрическим местам в многоферрорезонансных цепях (нем., рез. рум.)	47
КАМЕЛЯ АНДРОНЕ, Исследование магнитного модулятора с выходом на основной частоте (рум., рез. англ.)	53
М. АНТОНЕСКУ, Теоретические соображения по вопросу характеристик нелинейных катушек управляемые обратной связью (англ., рез. рум.)	63
ГАРИ ХЕРШКОВИЧ и ЭМИЛ ЛУКА, Новая интерпретация некоторых электронных явлений в крутой полупроводником переводе ПН (франц., рез. рум.)	69
Д. БЭРБУЛЕСКУ и НОНЕЛ ТИРЕР, Ваттметр-варметр с выпрямителями для измерения малых мощностей (рум., рез. франц.),	85
ЛАУРЯН ПРЕДА и ЭУДЖЕНИУ ВОЙНЯ, Возможности измерения несимметричной мощности в электрических станциях и подстанциях с помощью приборов которые используют артифициальную нейтраль (рум., рез. франц.)	95

Стр.

Н. ГАВРИЛАШ, РОДИКА ОЛАХ и МИРЧА ГУШЭ, О передачи импульсной волны в двухобмоточном трансформаторе (рум., рез. франц.) 103

АУРЕЛ ДОБРАНИШ и РЭЗВАН МЭГУРЯНУ, Выбор регулятора поперечного возбуждения синхронных машин с двумя обмотками возбуждения (англ., рез. рум.) 119

ЭМИЛ ТЕОДОРУ, О возможности управлении циркуляции мощности между составными частями двухроторного двигателя (рум., рез. англ.) 129

ВАЛЕРЮ МУНТЯНУ и ЛЕОПОЛД СЕБАСТЯН, Об эквивалентности структур нестационарных систем основанной на новой интерпретации умножения двух линейных дифференциальных операторов (II) (русск., рез. рум.) 135

ЕУДЖЕН БАЛАБАН, КОРНЕЛИЮ БОЦАН, МИРЧА ДЯКОНЕСКУ, Н. В. БОЦАН и ЛЕОПОЛД СЕБАСТЯН, Экспериментальные исследования в связи с регулируемым электроприводом с двумя асинхронными двигателями, из которых один с вращающемся статором (русск., рез. рум.) 141

КОРНЕЛИЮ ХУЦАНУ и Н. В. БОЦАН, О некоторых возможностях использования автодина в электроприводах с двигателями переменного тока (рум., рез. русск.) 149

ЛЕОПОЛД СЕБАСТЯН и КОРНЕЛИЮ БОЦАН, Удаление автоколебаний релейных сервомеханизмов способом правильного выбора передаточного числа редуктора (рум., рез. франц.) 159

ИОСИФ ОЛАХ и РОДИКА ОЛАХ, Датчик линейного перемещения чувствительный по направлению перемещения (англ., рез. рум.) 169

МИРЧА ДЯКОНЕСКУ, И. ЦИЦАРИУ и Г. САВИТЕСКУ, Прибор для измерения внутреннего угла синхронных двигателей (нем., рез. рум.) 177

ЗАИРА МУРГУ, Исследование энергетического процесса пуска двигателя постоянного тока с электронными аналогичными вычислительными машинами (англ., рез. рум.) 183

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. D. 621.317.44

MAGNÉTOMÈTRE À FERROSONDE, AVEC UNE SEULE VOIE MAGNÉTIQUE*)

PAR

GH. VASILIU

1. Dans une Note précedente [1] on a prouvé que „l'effet Procopiu" peut être modélé à l'aide d'un dispositif constitué par deux bobines ayant le même nombre de spires, connectées en opposition, et coaxiales avec une troisième, l'ensemble étant placé sur un noyau commun ferromagnétique. Les bobines *1*, *1'*, connectées en opposition (fig. 1), sont alimentées en courant alternatif à une fréquence comprise entre 500 et 2 000 Hz. Dans ces conditions si de l'extérieur on fait intervenir un champ constant, orienté selon la direction des bobines, on peut mettre en évidence l'existence d'une t.é.m. de fréquence double, induite dans la bobine *2*, ayant l'amplitude proportionelle à l'intensité H_0 du champ magnétique constant.

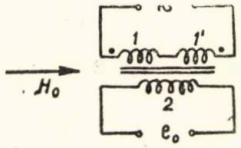


Fig. 1

Ce système peut être considéré et utilisé comme un magnétomètre avec une seule voie magnétique[1]).

*) Présentée lors de la session scientifique jubiliaire „60 ans d'Enseignement Électrotechnique à Jassy", 21—23 décembre 1972.

[1]) Enregistré comme brévet à O.S.I.M., sous le nr. 66 074, le 26 fevrier 1971.

2. On peut analyser le fonctionnement de ce magnétomètre à partir du cycle de hystéresis du matérial ferromagnétique dans le processus de magnétisation.

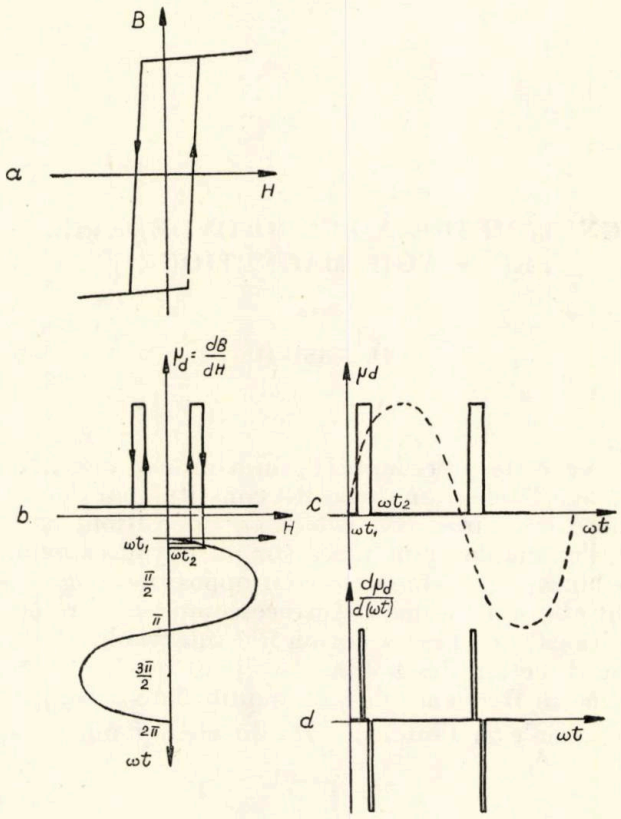


Fig. 2

Dans ce qui suit on va considérer surtout le cas d'un matériel à perméabilité magnétique élevée, ayant le cycle d'hystérésis rectangulaire (fig. 2 *a*). À l'aide de la courbe $B = B(H)$ on peut déduire, par voie graphique, la perméabilité dynamique μ_d fonction de l'intensité du champ magnétisant H, $\mu_d = \mu_d(H)$ (fig. 2 *b*), pour l'une des deux bobines connectées en opposition. On observe que μ_d est une grandeur positive et symétrique, comme il en résulte de l'analyse de la courbe obtenue. Par conséquent:

(1) $$\mu_d(H) = \mu_d(-H).$$

Si l'on utilise toutefois et la courbe $H = H(\omega t)$ on peut déduire de $\mu_d(H)$ la courbe $\mu_d(\omega t)$ (fig. 2 *c*). Par dérivation graphique de cette dernière courbe on obtient la vitesse de variation de la perméabilité dynamique ($\mathrm{d}\mu_d/\mathrm{d}(\omega t)$ — fig. 2 *d*). Évidemment cette vitesse se réfère à seul cycle.

3. La construction graphique utilisée permet à observer que le résultat de la magnétisation du matérial magnétique se traduit par la variation sous forme d'impulsions positives de la perméabilité dynamique μ_d. Pour la seconde bobine (*1'*) le processus de magnétisation découle dans la même manière que pour la première bobine (*1*) de sorte que pendant l'alternance positive du courant il se produit une impulsion positive pour μ_d dans la bobine (*1*); dans la bobine (*1'*) l'alternance négative produit de même une impulsion positive pour μ_d, dans le même noyau magnétique. Il en résulte que la perméabilité magnétique varie, dans le noyau magnétique, sous forme d'impulsions positives quoi que les bobines sont connectées en série ou bien en opposition.

4. Compte tenu que les bobines (*1*), (*1'*) sont connectées en opposition, les deux t. m. m. produites par celles ci s'annulent et par conséquent dans la bobine coaxiale (*2*) il n'y aura pas de l'induction mutuelle, en éliminant par cette voie la possibilité de transmission des fréquences par effet de transformateur.

Par d'autre part le champ magnétique constant produira dans chaque spire de la bobine collectrice (*2*), ayant la section d'aire A, un flux magnétique :

$$\Phi = \mu_d H_0 A, \tag{2}$$

de sorte que dans toutes les w spires de la même bobine on aura le flux :

$$\Psi = \mu_d H_0 A w. \tag{3}$$

La t.é.m. induite dans la bobine (*2*) est :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -H_0 A w \frac{\mathrm{d}\mu_d}{\mathrm{d}t} = -H_0 A w \omega \frac{\mathrm{d}\mu_d}{\mathrm{d}(\omega t)}. \tag{4}$$

L'analyse de la fig. 2 *e* permet à observer que $\mathrm{d}\mu_d/\mathrm{d}(\omega t)$ a la fréquence double par rapport à celle du champ megnétisant H (de fréquence f). En outre l'amplitude de la t.é.m. induite est proportionnelle à l'intensité du champ constant H_0 en constituant une mesure de celui-ci surtout dans le cas des champs magnétiques faibles lorsque μ_d n'est pas modifié par le champ H_0.

Conclusions

L'analyse effectuée permet à constater que :

a) La perméabilité dynamique est une grandeur périodique positive et symétrique. Dans les matériaux homogènes et isotropes et dans le cas où le circuit magnétique est soumis à une magnétisation alternative sinusoïdale, la perméabilité magnétique μ_d a la même valeur dans chaque point et dans n'importe quelle direction.

b) Si le matériel est anisotrope la perméabilité magnétique aura des valeurs différent s selon la direction considérée.

c) Lorsque la magnétisation est réalisée de telle sorte que l'induction mutuelle soit nulle, se mettent en évidence ces phénomènes dûes à la variation de la perméabilité dynamique du matériel. C'est le cas étudié dans cette Note ; toutefois c'est aussi le cas des circuits magnetisées d'après deux directions orthogonales où bien le cas de l'effet „Procopiu".

d) Le dispositif réalisé permet à mesurer l'intensité des champs faibles par des moyens statiques, en obtenant la valeur de l'intensité du champ même et pas celle de sa dérivée.

Reçue le 8 janvier 1973

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Électrotechnique
et de Mesures Électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Vasiliu Gh., *Résultats nouveaux concernant l'„effet Procopiu"*. Bul. Inst. polit. Iași, XIV (XVIII), *1—2*, 329—334 (1968).

MAGNETOMETRU CU FEROSONDĂ CU O SINGURĂ CALE MAGNETICĂ

(Rezumat)

Se analizează funcționarea unui magnetometru cu ferosondă saturabilă, cu o singură cale magnetică[2]), plecînd de la curba de histerezis a materialului miezului și utilizînd o metodă grafică. Se ajunge la concluzia că în cazul acestui magnetometru, ca și în celelalte cazuri în care inducția mutuală este înlăturată, f.e.m. de frecvență pară care se induce în circuitul de măsură se datorește variației în impulsuri a permeabilității dinamice, ca rezultat al magnetizării miezului feromagnetic precum și acțiunii cîmpului magnetic exterior ce trebuie măsurat, amplitudinea acestei t.e.m. constituind o măsură a intensității cîmpului exterior.

[2]) Brevet nr. 66 074, O.S.I.M., 26 februarie 1971.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

D.K. 621.318.423; 621.314.263

DIE NICHTLINEARE GESTEUERTE SPULE IN SCHALTUNGEN VON FREQUENZVERVIELFACHERN *)

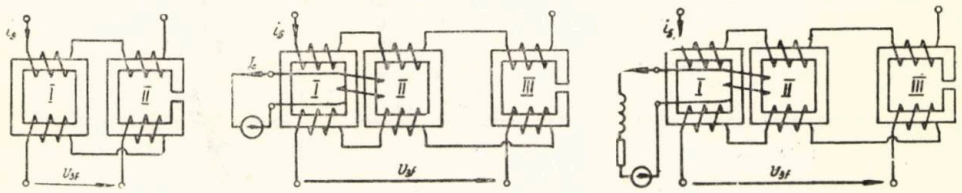
VON

GH. SAVIN, NORBERT ZITRON und DANA BALAN

1. Vorwort

Das Problem der Frequenzvervielfachung des Ausgangssignals mit dem Faktor n besteht in der Realisierung einer Eingangs—Ausgangskennlinie derer Form soll durch ein Tschebyscheffspolynom n-ten Grades aproximierbar sein [1].

Die Frequenzvervielfacher mit nichtlinearen Spulen können mit einer sinusförmiger Spannung, also annäherend bei sinusförmigen Fluß, oder mit sinusförmigen Strom erregt werden.



a *b* *c*

Abb. 1

Für die praktische Verwirklichung der ferromagnetischen Frequenzvervielfachern mit ungeraden Vervielfachungfaktor wurden, in der letzten Zeit, nichtlineare gesteuerte Spulen verwendet. Ihrer Magnetisierungsvorgang, mit freien oder gezwungenen Stromharmonischen, spielt in der Arbeitsweise der Vervielfachern eine wesentliche Rolle. So, in der von Joly [2] vorgeschlagener Verdreifachersschaltung (Abb. 1 *a*) hat Bessonov [3] die nichtlineare ungesteuerte Spule mit einer gesteuerten im freien Magnetisierungsvorgang verwechselt und hat einen neuen Frequenzverdreifacher erhalten (Abb. 1 *b*). Gh. Savin und Mitarbeiter [4] haben die ungesteuerte nichtlineare Spule mit einer gesteuerten im gezwungenen Magnetisierungsvorgang verwechselt und erlangten zur Verdreifachung oder Verfünffachung der Frequenz (Abb 1 *c*). Solche Bemerkungen über

*) Mitgeteilt an der wirssentschaftlichen Jubeltagung „60 Jahre von elektrotechnischen Unterricht in Jassy", 21.—23. Dezember 1972.

die Abwesenheit einer einheitlicher Untersuchung der Verdreifachern die nichtlineare gesteuerte Spulen enthalten können auch für die dreiphasigen Verdreifacher gemacht werden.

2. Kennlinien der nichtlinearen longitudinal-gesteuerten Spulen (NLGS) im freien und gezwungenen Magnetisierungsvorgang

2.1. Erfahrungsmässige Betrachtungen

Aus erfahrungsmässigen Daten und oszilloskopischen Bemerkungen könnten die Hysteresisfreien Kennlinienfamilien $\psi_t(i_s)_{I_c=\text{konst.}}$ und $\psi_t(i_s)_{\psi_m=\text{konst.}}$ in den zwei Speisungsfällen, bei sinusförmiger Spannung oder Strom, und in den zwei Arbeitsvorgängen, mit freien oder gezwungenen geraden Stromharmonischen, dargestellt werden.

In Abb. 2 *a*, *b*, *c*, wurden diese Kennlinienfamilien im Falle der Arbeitsweise der gesteuerten Spule im freien Magnetisierungsvorgang (*a* — Speisung bei sinusförmiger Spannung, *b* — Speisung bei sinusförmiger Strom, *c* — Speisung bei sinusförmiger Spannung oder Strom für einen bestimmten I_c) und in Abb. 3 *a*, *b*, *c* die selben Kennlinienfamilien im gezwungenen Magnetisierungsvorgang, dargestellt.

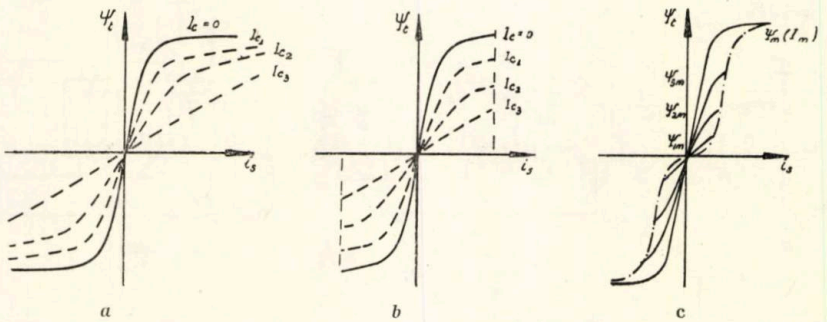


Abb. 2

Aus der Kennlinienfamilie (Abb. 2 *a*) folgt, daß bei einer Speisung mit sinusformigen Fluß wächst der Belastungsstrom mit dem Wachsen des Steuerungsstrom. Weil die Krümmungsrichtung der Kennlinien sich nicht ändert, ändern sich auch die Phasenbeziehungen zwischen die höheren Harmonischen und die Grundharmonische nicht. Die Amplitude der Harmonischen wächst zuerst mit dem Steuerungsstrom um nacher sich bei größeren Steuerungstromen zu annulieren.

Im Falle der Speisung mit einem sinusförmigen Strom (Abb. 2 *b*) verkleinert sich und strebt zu Null die Amplitude der dritten Harmonische ohne sich die Phase in Bezug zur Grundharmonische zu ändern.

In Abb. 2 *c* wurde die Kennlinie $\psi_t(i_s)$ für den selben Steuerungsstrom aber für verschiedene Höchstwerte der Speisungsspannung oder des Speisungsstroms dargestellt. Es ist zu bemerken, daß bei Wachsen der Speisungsspannung oder des Speisungsstroms die Kennliniesteigung wächst und die Nichtlinearität ausgeprägter wird. In der selben Zeit wächst auch der Harmonischeninhalt des Antwortssignals ohne sich die Phasenverschiebung zwischen denen sich zu ändern.

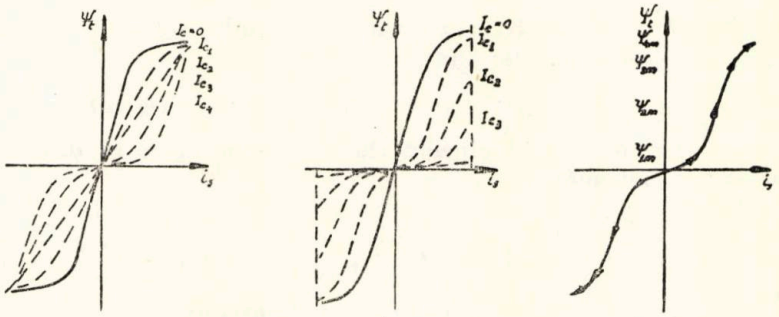


Abb. 3

Punktiert ist die Kennlinie $\psi_m(I_m)$, die neben der Sättigungsnichtlinearität auch eine starke Ursprungsnichtlinearität vorweist, dargestellt.

Die Kennlinienfamilie aus Abb. 3 *a* ändert ihre Form und bekommt auch eine Ursprungsnichtlinearität wenn der Steuerungstrom ein bestimmten Wert erhält (I_{c1}). Für diesen Wert ist die Kennlinie $\psi_c(i_s)$ praktisch linear. Wird die Form des Antwortssignals untersucht, dann folgt, daß dieses das selbes Harmonischenspektrum (die ungeraden Harmonischen des Erregungssignals), aber deren Phasen verschieden sind, enthält. So, bei einer Erregung mit sinusförmigen Fluß ist die dritte Stromharmonische in Phasenopposition mit der Grundharmonische, für die Kennlinien mit der Einbuchtung zur Stromachse und in Phase mit der Grundharmonische, für die Kennlinien mit der Einbuchtung zur Flußachse.

Im Falle der Erregung mit sinusförmigen Strom ist das Prozeß von der in Abb. 3 *b* dargestellten Kennliniefamilie beschrieben. Es folgt daß mit dem Wachsen des Steuerungsstrom sich die Amplituden der ungeraden Harmonischen ändern. Die dritte Harmonische annuliert sich bei einem bestimmten Steuerungsstrom um nacher sich ihre Phase mit 180° zu ändern.

In Abb. 3 *c* wurde eine einzige Kennlinie $\psi_i(i_s)_{\psi_m=\text{konst.}}$ dargestellt weil die Kennlinienfamilie *11'*, *22'*, *33'* und *44'*, die den verschiedenen Fluß (Spannungs)höchstwerte entschprechen Übereinstimmungteile besitzen. Wie man merkt stimmt die Kennlinie für die Höchstwerte mit der für die augenblickswerte $\psi_{44'}$ $(i_{s44'})$ überein.

Die genaue Erkenntnis der Kennlinienform $\psi(i)$ kann den Geschulten zur Bestimmung des Bereichen in welchen die Frequenzvervielfacher mit NLGS optimale Arbeitsparametern vorweisen, führen.

2.2. Theoretische Betrachtungen

Die NLGS mit zwei Kernen kann man analytisch untersuchen, wenn die Magnetisierungskennlinie durch :

(1) $$i = k_1 \psi + k_3 \psi^3, \quad \text{oder} \quad (2) \qquad \psi = c_1 i - c_3 i^3$$

angenähert wird und man einzeln die Erscheinungen in den zwei Arbeitsvorgängen betrachtet.

2.2.1. NLGS bei sinusförmiger Flußerregung

a) *Freier Magnetisierungsvorgang*

Im diesen Arbeitsvorgang ist der Steuerungsstrom auch von Strömen mit doppelter Frequenz durchfloßen.

Schreibt man für die Kerne *I* und *II* der NLGS aus Abb. 1 *b* die Gleichung (1) so ergibt sich das System :

(3) $$i_s + I_c + i_2 = k_1\psi_I + k_3\psi_I^3, \qquad i_s - I_c - i_2 = k_1\psi_{II} + k_3\psi_{II}^3,$$

wobei :

(4) $$\psi_I = \psi_s + \psi_c = \psi_{sm} \cos \omega t + \psi_c, \qquad \psi_{II} = \psi_s - \psi_c = \psi_{sm} \cos \omega t - \psi_c.$$

Die Arbeitskennlinie der NLGS, $i_s(\psi_I + \psi_{II})$, im freien Magnetisierungsvorgang erhält man durch Einsetztung der Gleichungen (4) in das System (3) :

(5) $$i_s = a_1(\psi_I + \psi_{II}) + a_3(\psi_I + \psi_{II})^3,$$

wobei :

(6) $$a_1 = \frac{1}{2}(k_1 + 3k_3\psi_c^2), \qquad a_3 = \frac{k_3}{8}.$$

Die Gleichungen (5) und (6) ermöglichen wegen der Beziehung zwischen I_c und ψ_c die Erläuterung der Kennlinienform aus Abb. 1 *a*.

b) *Gezwungener Magnetisierungsvorgang*

Dieser Arbeitsvorgang der NLGS kennzeichnet sich durch die Abwesenheit der geraden Stromharmonischen.

Die Gleichungen (3) für die NLGS aus Abb. 1 *c* werden :

$$i_s + I_c = k_1 \psi_I + k_3 \psi_I^3, \qquad i_s - I_c = k_1 \psi_{II} + k_3 \psi_{II}^3, \tag{7}$$

wobei :

$$\begin{cases} \psi_I = \psi_s + \psi_c + \psi_2 = \psi_{sm} \cos \omega t + \psi_c - \psi_{2m} \cos 2\omega t, \\ \psi_{II} = \psi_s - \psi_c - \psi_2 = \psi_{sm} \cos \omega t - \psi_c + \psi_{2m} \cos 2\omega t. \end{cases} \tag{8}$$

Nützt man die Gleichungen (7) und (8) dann folgt die Arbeitskennlinie der gesteuerten Spule im gezwungenen Magnetisierungsvorgang :

$$i_s = a_1(\psi_I + \psi_{II}) + a_3(\psi_I + \psi_{II})^3 + a_5(\psi_I + \psi_{II})^5, \tag{9}$$

wobei :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{k_1}{2} + \dfrac{3}{2} k_3(\psi_c + \psi_{2m})^2, \\ a_3 = \dfrac{k_3}{2}\left[\dfrac{1}{4} - 3\dfrac{\psi_{2m}(\psi_c + \psi_{2m})}{\psi_{sm}^2}\right], \quad a_5 = \dfrac{k_3}{8} \cdot \dfrac{\psi_{2m}^2}{\psi_{sm}^4}. \end{cases} \tag{10}$$

Die Koeffizienten a_1, a_3 und a_5 sind vom Steuerungsstrom I_c durch die Flüße ψ_c und ψ_{2m} abhängig. Für kleine Steuerungsstromwerte ist $a_3 > 0$ und die Kennlinie präsentiert keine Ursprungsnichtlinearität. Für ein bestimmten Steuerungsstromwert ist $a_3 = 0$, nachdem bei weiterem Wachsen des Steuerungsstrom wird a_3 negativ und die entschprechende Kennlinie zeigt auch eine Ursprungsnichtlinearität (Abb. 3 *a*).

2.2.2. NLGS bei sinusförmiger Stromerregung

a) *Freier Magnetisierungsvorgang*

Die Kennlinie der NLGS kann von der Gleichung (5) oder von :

$$\psi_I + \psi_{II} = b_1 i_s - b_3 i_s^3, \tag{11}$$

ausgedrückt werden.

Setzt man in (11) den von (5) gegebenen Strom ein, dann ergeben sich nach Identifizierung die Koeffizienten :

$$b_1 = \frac{2}{k_1 + 3k_3\psi_c^2}, \quad b_3 = \frac{2k_3}{(k_1 + 3k_3\psi_c^2)^4}, \tag{12}$$

die der Arbeitsweise der NLGS bei sinusförmiger Stromserregung entschprechen. Die erfahrungsmäßig bemerkten Eigenschaften prüfen sich.

b) *Gezwungener Magnetisierungsvorgang*

Die Kennlinie der NLGS im gezwungenen Magnetisierungsvorgang wird durch :

$$\psi_I + \psi_{II} = b_1 i_s - b_3 i_s^3 - b_5 i_s^5, \tag{13}$$

angenähert.

Zieht man die leichungen (9) und (13) heran, dann folgt durch Identifizierung :

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{2}{k_1 + 3k_3(\psi_c + \psi_{2m})^2}, \\ b_3 = \dfrac{k_3\left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\psi_{2m}(\psi_c+\psi_{2m})}{\psi_{sm}^2}\right]}{8[k_1 + 3k_3(\psi_c + \psi_{2m})]^4} = \dfrac{a_3}{K}, \quad (K > 0), \\ b_5 = \dfrac{\dfrac{k_3}{16}\cdot\dfrac{\psi_{2m}^2}{\psi_{sm}^2}[k_1 + 3k_3(\psi_c + \psi_{2m})^2] - \dfrac{3}{4}k_3^2\left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\psi_{2m}(\psi_c+\psi_{2m})}{\psi_{sm}^2}\right]^2}{a_1^7}, \end{cases} \tag{14}$$

wobei $a_1^7 > 0$.

Aus der Erläuterung der Koeffizientenwerte kann man eine gute Übereinstimmung mit den erfahrungsmäßigen Ergebnißen herleiten.

3. Einfacher Frequenzvervielfacher mit NLGS

3.1. Allgemeine Betrachtungen

Weil die Form der Kennlinie Fluß—Strom im Falle der Abwesenheit des Steuerungsstroms und im Falle der Arbeitsweise mit freien geraden Stromharmonischen genau gleich ist, arbeiten die Schaltungen aus Abb. 1 *a* und 1 *b* praktisch gleich (Abb. 4).

Betrachtend, daß sich der Arbeitspunkt bei einem bestimmten Flußwert nach der Sättigungskrümmung befindet, führen die bezüglich kleine Änderungen der Speisungsspannung zu einer großer Änderung des Kernsättigungszustands. Um streng den Arbeitspunkt zu aufheben müßte der nichtgesteuerte Verdreifacher mit Hilfe einem Spannungsstabilisator gespeist werden. Das ist nicht mehr notwendig wenn der Verdreifacher

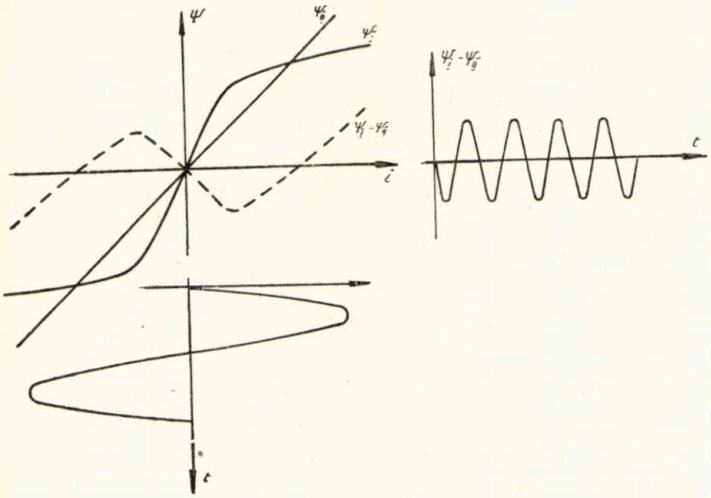


Abb. 4

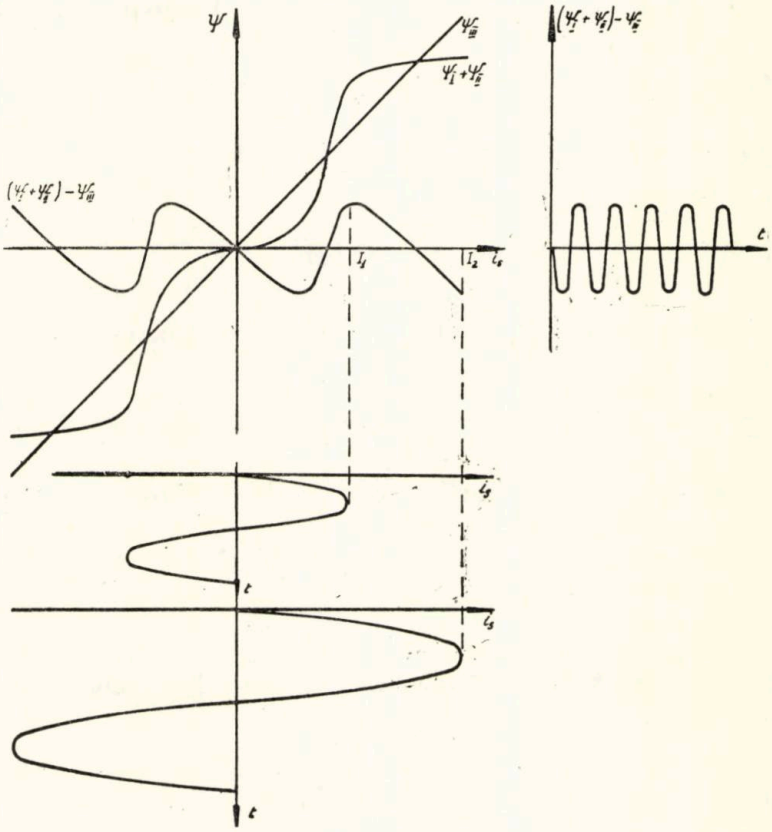


Abb. 5

im freien Magnetisierungsvorgang arbeitet, weil man den gewünschten Magnetisierungszustand wieder durch die entschprechende Änderung des Steuerungsstroms herstellen kann.

Die Schaltung aus Abb. 1 *c* arbeitet gemäß der Abb. 5. Wenn der Erregungshöchstwert I_1 ist, dann arbeitet die Anlage als Verdreifacher und wenn dieser I_2 ist, arbeitet die Anlage als Frequenzverfünffacher. Offenbar, im diesen letzten Fall, durch Annulierung des Steuerungsstroms geht man zum freien Magnetisierungsvorgang der NLGS über und die Anlage wird als Frequenzverdreifacher funktionieren.

3.2. Analytische Untersuchung des Leerlaufs des einphasigen Frequenzverdreifachers

3.2.1. Einphasiger Frequenzverdreifacher mit nichtlinearer nichtgesteuer Spule bei sinusförmiger Stromspeisung (Abb. 1 *a*)

Die Kennlinien der Spulen die den Verdreifacher bilden sind:

$$\psi_I = c_1 i_s - c_3 i_s^3, \qquad \psi_{II} = d i_s, \tag{15}$$

wobei:

$$i_s = I_m \cos \omega t, \tag{16}$$

für

$$i_s \in \left[-\sqrt{\frac{c_1}{3c_3}}, \quad +\sqrt{\frac{c_1}{3c_3}} \right].$$

Der Ausgangsfluß, den man bei den Sekundärenklemmen erhält, folgt

$$\psi_{sec} = \psi_I - \psi_{II} = (c_1 - d - \frac{3}{4} c_3 I_m^2) I_m \cos \omega t - \frac{3}{4} I_m^3 \cos 3\omega t. \tag{17}$$

Damit der Sekundärfluß nur die dritte Harmonische enthält muß:

$$d = c_1 - \frac{3}{4} c_3 I_m^2 \tag{18}$$

befriedigt werden.

Wann d gegeben ist um die Grundharmonische aus dem Ausgangssignal zu annulieren muß die Amplitude des Erregungsstroms den Wert:

$$I_m = \sqrt{\frac{4}{3c_3}(c_1 - d)} \tag{19}$$

haben.

3.2.2. Einphasiger Frequenzverdreifacher mit NLGS im freien Magnetisierungsvorgang

Die Kennlinien der Spulen die den Verdreifacher bilden sind von den Gleichungen (11), für die NLGS, und (15_2) für die lineare Spule, gegeben.

Wendet man ein ähnliches Verfahren an und betrachtend die Gleichung (12) dann folgt :

$$d = \frac{2}{k_1 + 3k_3\psi_c^2} - \frac{3}{4} I_m^2 \frac{2k_3}{(k_1 + 3k_3\psi_c^2)^4} . \tag{20}$$

3.2.3. Einphasiger Frequenzverdreifacher mit NLGS im gezwungenen Magnetisierungsvorgang

Die Kennlinien der Spulen die den Verdreifacher bilden sind von den Gleichungen (13) und (15_2) gegeben.

Nützt man das selbe Algorithmus so erhält man :

$$\psi_{sec} = \psi_I + \psi_{II} - \psi_{III} = (b_1 - \frac{3}{4} b_3 I_m^2 - \frac{5}{8} b_5 I_m^4 - d) I_m \cos \omega t - \tag{21}$$
$$- \left(\frac{1}{4} b_3 I_m^2 + \frac{5}{16} b_5 I_m^4 \right) I_m \cos 3\omega t + \frac{5}{16} b_5 I_m^5 \cos 5\omega t.$$

Das Spektrum des Ausgangssignals zeigt die Möglichkeit der Anlagearbeitsweise als Verdreifacher oder Verfünffacher der Frequenz. Für die Arbeitsweise als Verdreifacher müssen gleichzeitig die Gleichungen :

$$d = b_1 - \frac{3}{4} b_3 I_m^2, \quad b_5 = 0 \tag{22}$$

befriedigt werden. Das kann man durch die Steuerungsstromänderung realisieren.

Die Arbeitsweise als Verfünffacher ist von der gleichzeitigen Erfüllung der Gleichungen :

$$d = b_1 - \frac{3}{4} b_3 I_m^2 - \frac{5}{8} b_5 I_m^4, \quad b_3 = - \frac{5}{8} b_5 I_m^2, \tag{23}$$

die man durch die Änderung von I_c und I_m befriedigen kann, bedingt.

4. Dreiphasige Frequenzvielfacher

4.1. Dreiphasiger Frequenzverdreifacher mit NLGS

In den dreiphasigen Kreisen können die nichtlineare gesteuerte und ungesteuerte Spulen nur als Frequenzverdreifacher und Sechsfacher arbeiten. Auch in diesem Falle kann man Verdreifacher mit nichtlinearen ungesteuerten Spulen und NLGS in den zwei Arbeitsfällen unterscheiden. Die Verdreifacher mit ungesteuerten Spulen sind bekannter und wurden zuerst von S p i n e l l i [5] beschrieben. In Abb. 6 ist eine von den Verdreifachersschaltungen gezeigt (es sind wenigstens vier verschiedene Schaltungen bekannt).

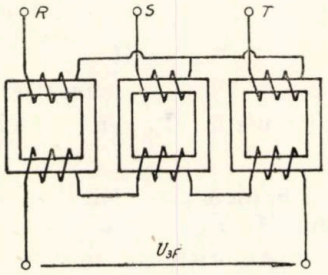


Abb. 6

Der Ausgangskreis ist durch Schaltung der drei Transformatorensekundäre im offenen Dreieck verwirklicht. In diesem Kreis induziert sich hauptsätzlich eine Spannung mit der Frequenz $3f$, die von den ungeraden Harmonischen Vervielfach von 3 gestört wird. Aus diesem Aussichtspunkt arbeitet der Verdreifacher in sehr guten Bedingungen, weil die erste Harmonische die das Signal verzerrt ist $9f$, die eine ziemlich kleine Amplitude hat. Wenn sie gut projektiert sind und passende Filter besitzen, haben solche Verdreifacher ein sehr hohen Wirkungsgrad (90...98% [9], [10]). Sie haben aber die Ungünstigkeit, daß die Speisung durch einen Spannungsstabilisator, um die Arbeitsweise beim gewünschten Sättigungsgrad zu erhalten, notwendig ist.

Die Steuerungseinführung ist von vielen Verfassern als vorteilhaft betrachtet, weil die Erreichung des erwünschten Sättigungspunkts durch der Gleichstromssteuerung günstiger ist. Selbsverständlich, daß, andere Verfasser das bestreiten. Die Kontroversen erscheinen auch weil nicht die Arbeitsweisen der NLGS, mit freien oder gezwungenen Stromharmonischen, bestimmt werden.

Aus den zahlreichen Schaltungen die NLGS enthalten scheinen uns die von B i r i n g e r [6], arbeitend bei gezwungenen geraden Stromharmonischen und die von McM u r r a y [7], arbeitend bei freien geraden Stromharmonischen, die ausgebildeten. In Abb. 7 ist die von B i r i n g e r vorgeschlagene Schaltung gezeigt.

Die Eigenheit dieser Schaltung besteht in der Tatsache, daß durch die additive Reihenschaltung der Steuerungswicklungen können die Harmonischen sechs und Vervielfach von sechs frei fließen. So funktioniert die Schaltung partiell mit freien geraden Harmonischen.

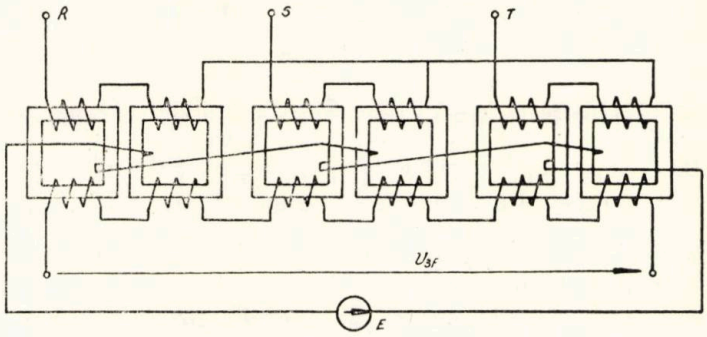


Abb. 7

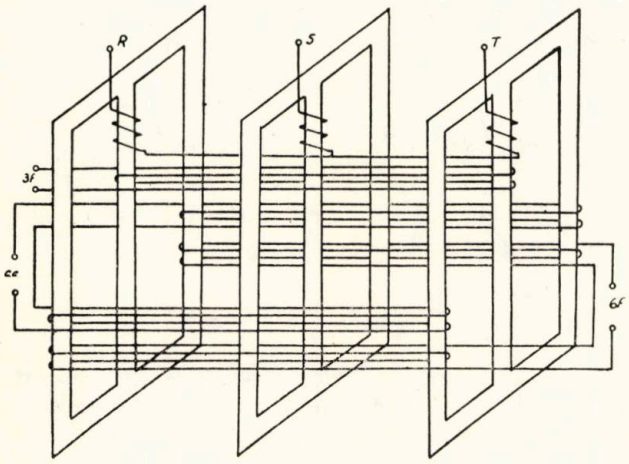


Abb. 8

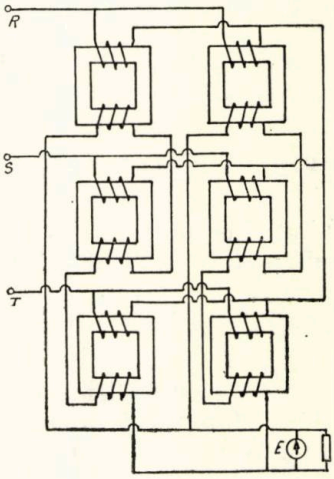


Abb. 9

Eine besondere praktische Realisierung der Biringerschaltung wurde von Bamdas vorgeschlagen [8] (Abb. 8). Dieser Verfasser hat gemerkt, daß der Antwortssignal mit der Frequenz $3f$ sich die Phase mit 180° durch Null gehend ändert.

In Abb. 9 ist die Schaltung von McMurray, die NLGS im freien Magnetisierungsvorgang enthaltet, gezeigt. Die freie Magnetisierung ist durch Parallelbindung der Arbeitswicklungen verwirklicht. Die Haupt-

schwierigkeit der Anwendung dieser Schaltung besteht in der Isolierungsnotwendigkeit der Belastung von der Gleichsstromquelle. Dieses wird im Belastungskreis durch Verwendung von Kondensatoren und Spulen realisiert. Die Anwendung von Kondensatoren in Kreisen mit nichtlinearen Spulen muß mit vielen Vorsichten gemacht werden, weil es Ferroresonanz erscheinungen, Erregungen von subharmonischen oder langsamen Schwingungen möglich sind.

4.2. Analytische Untersuchung des Leerlaufs des dreiphasigen Frequenzverdreifachers

4.2.1. Dreiphasiger Frequenzverdreifacher mit nichtlinearen ungesteuerten Spulen

Die Kennlinien der gleichen Verdreifacherskerne können durch der Gleichung (2) angenähert werden.

Wendet man die Gleichung (2), einzeln, für jeden Verdreifacherskern an, dann folgt :

$$\psi_I = c_1 i_{s_1} - c_3 i_{s_1}^3, \quad \psi_{II} = c_1 i_{s_2} - c_3 i_{s_2}^3, \quad \psi_{III} = c_1 i_{s_3} - c_3 i_{s_3}^3, \tag{24}$$

wobei i_{s_1}, i_{s_2}, i_{s_3} die Komponenten eines dreiphasigen symetrischen Stromssystem :

$$i_{s_1} = I_m \cos \omega t, \quad i_{s_2} = I_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_{s_3} = I_m \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right), \tag{25}$$

sind. Für den sekundären magnetischen Fluß, weil die Wicklungen im offenen Dreieck gebunden sind, ergibt sich :

$$\psi_{sec} = \psi_I + \psi_{II} + \psi_{III} = -\frac{3}{4} c_3 I_m^3 \cos 3\omega t. \tag{26}$$

Aus der Gleichung (26) merkt man, daß der resultierende sekundäre Fluß die Frequenz $3f$ hat und von der Nichtlinearität der Kennlinie (c_3) und von der Amplitude des Erregungsstroms abhängig ist.

4.2.2. Frequenzverdreifacher mit NLGS im freien Magnetisierungsvorgang

In diesem Falle befriedigen die Kennlinien der Verdreifacherskerne eine Gleichung der Form (11), wobei die Koeffizienten b_1 und b_3 von (12) gegeben sind. Wird der Verdreifacher von einem symetrischen Stromssystem (25) gespeist, dann erhält man für ψ_{sec} den Ausdruck :

$$\psi_{sec} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k_3}{(k_1 + 3k_3 \psi_c^2)^4} I_m^3 \cos 3\omega t. \tag{27}$$

Die Gleichung (27) zeigt, daß einal mit dem Steuerungsstromwachsen (also ψ_c), nimmt ψ_{sec} mit der Frequenz $3f$ monoton ab. Bei großen Werten von $I_c(\psi_c)$ wird ψ_{sec} sehr klein und strebt zu Null.

4.2.3. Frequenzverdreifacher mit NLGS im gezwungenen Magnetisierungsvorgang

Um die Kennlinie der NLGS zu aproximieren mus man den Ausdruck (13), wobei b_1, b_3 und b_5 von (14) gegeben sind, verwenden. Werden die Ausdrücke (25) der Speisungsströme betrachtet, so folgt für den sekundären Fluß:

$$\psi_{sec} = -\frac{3}{4} I_m^3 \left(b_3 - \frac{5}{4} b_5 I_m^2 \right) \cos 3\omega t. \tag{28}$$

In Abhängigkeit vom Zeichen der Koeffizienten b_3 und b_5 (14) kann die dritte Flußharmonische sich annulieren oder sich die Phase mit 180° änderen.

5. Bemerkungen über die Anwendung der NLGS bei Realisierung von Frequenzvervielfacher mit ungeraden Vervielfachungsfaktor

5.1. Einphasige Frequenzvervielfacher

a) Der Frequenzvervielfacher mit NLGS im gezwungenen Magnetisierungsvorgang (Abb. 1 *c*) kann als Verdreifacher sowie auch als Verfünffacher arbeiten. Bei der Arbeit als Verdreifacher ist der Ausgangssignal mit der Frequenz $3f$ in Phasenopposition mit dem erlangten Ausgangsignal, wenn man die nichtlineare ungesteuerte Spule oder die NLGS im freien Magnetisierungsvorgang verwendet.

b) Der Übergang von der Arbeit als Verfünffacher zur Arbeit als Verdreifacher kann, einfach, auf zwei Wege: durch Annulierung des Steuerungsstroms oder durch Kurzschlußschaltung einer Wicklung, die mit der Steuerungswicklungen gekoppelt ist, realisiert werden.

c) Es existiert ein Bereich für welchen, um die gewünschte Sättigung zu erhalten ist die Verwendung eines Steuerungsstroms im freien Magnetisierungsvorgang günstiger als die Speisung des Frequenzverdreifachers durch einen Spannungsstabilisator.

5.2. Dreiphasige Frequenzverdreifacher

Nachdem man den gezwungenen Magnetisierungsvorgang durch die Reihenschaltung der Steuerungswicklungen und den freien Magnetisierungsvorgang durch deren Parallelschaltung realisierte, wurden vier

Kennlinien, die man als bedeutsame betrachtete, dargestellt. Ebenfalls, aus der Arbeitsuntersuchung, wurden die wichstigsten praktischen Folgerungen gezogen.

a) Die Kennlinie $U_{3f}(I_c)$ bei sinusförmiger Spannungsspeisung.

In Abb. 10 wurde mit voller Linie die Kennlinie $U_{3f}(I_c)$ für die NLGS im freien Magnetisierungsvorgang und mit punktierter Linie die selbe Kennlinie für die NLGS im gezwungenen Magnetisierungsvorgang dargestellt. Der Durchschnittspunkt (C) der zwei Kennlinien grenzt die Bogen AC und CD die die optimalen Arbeitsbereichen im freien und gezwungenen Magnetisierungsvorgang bestimmen, ab. Im Bereich BCD ist aber die Spannung U_3 in Phasenopposition mit der entschprechender Spannung für AB.

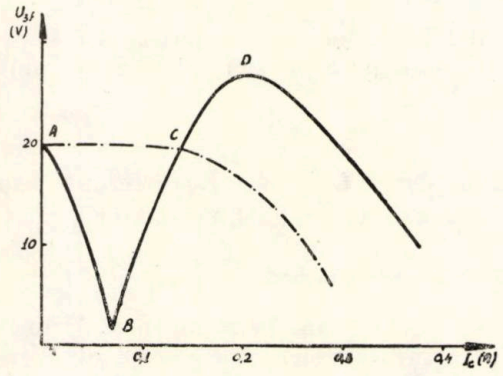


Abb. 10

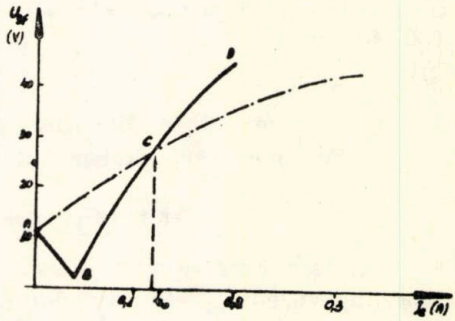


Abb. 11

b) Die Kennlinie $U_{3f}(I_c)$ bei sinusförmiger Stromspeisung.

In Abb. 11 ist, ebenfalls, mit voller Linie für den freien und mit punktierter Linie für den gezwungenen Vorgang, die Kennlinie $U_{3f}(I_c)$ gezeigt.

c) Werden die zwei Arbeitstypen vergleicht, dann folgt, offenbar, daß die Speisung mit sinusförmiger Spannung ein besonderes Interesse präsentiert.

d) Auch im Falle des dreiphasigen Verdreifachers schätzt man, daß es Bereichen im welchen die Erhaltung des gewünschten Sättigungszustandes durch die Kreissteuerung wirksamer als durch Verwendung von Spannungsstabilisatoren ist, existieren.

Eingegangen am 20. Februar 1973

Technische Hohschule, Jassy,
Lehrstuhl für Elektrotechnik und
Elektrische Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Müller Kl., *Einphasige Frequenzvervielfachung mit optimalen Vervielfacherkennlinien und ihre technische Realisierung* Diss., Ilmenau, 1963.
2. Joly M., *Transformateurs statiques de fréquence.* La Lumière Électrique, **14**, *20*, 195 (1911).
3. Бессонов Л. А., *Нелинейные электрические цепи.* Изд. „Высшая Школа", М., 1964.
4. Savin Gh., Mitrea S., Zitron N., *Single Phase Ferromagnetic Frequency Multiplier with an Odd Multiplication Factor.* Bul. Inst. polit. Iaşi, s. III, XV (XIX), *1—2*, 25—32 (1969).
5. Spinelli F., *Electric Lighting and the Conversion of Threephase into Single-Phase Currents of Triple Frequency.* Electrician, **70**, 97—99 (1912).
6. Biringer P. P., *The Triductor.* AIEE Trans., **75**, I, 590—591 (1956).
7. McMurray W., *Magnetic Frequency Multipliers and Their Rating.* I. *Frequency Triplers.* AIEE Trans., 385 (1956).
8. Бамдас А. М., Шапиро С. В., *Некоторые конструкций ферромагнитных умножителей частоты.* В сб. *Магнитные элементы.* Наукова думка, Киев, 155—163, 1964.
9. Бамдас А. М., Блинов И. В., Захаров И. В., Шапиро С. В., *Ферромагнитные умножители частоты.* Изд. Энергия, М., 1968.
10. Ротанский Л. Л., *Статические элекромагнитные преобразователи частоты.* ГЭИ, М. - Л., 1959.

BOBINA NELINIARĂ COMANDATĂ ÎN SCHEME DE MULTIPLICARE A FRECVENŢEI

(Rezumat)

Se studiază teoretic şi se verifică experimental multiplicatoarele de frecvenţă cu factor de multiplicare impar realizate cu ajutorul bobinelor neliniare comandate longitudinal în regim de magnetizare liberă şi forţată. Din studiul sistematic rezultă, drept cazuri particulare, toate tipurile de multiplicatoare cunoscute. Se obţin rezultate originale în legătură cu domeniul practic de utilizare a multiplicatoarelor de frecvenţă cu bobine neliniare comandate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. C. 621.373.93

ON A GENERALIZATION OF THE MANLEY-ROWE RELATIONS *)

BY

HUGO ROSMAN

Dedicated to professor GH. VASILIU to his 70th anniversary

1. Nonlinear (selfparametric) nondissipative reactive circuit elements, hysteresisless, in which nonperiodic processes do not take place, are characterized by the remarkable property of transfering active power from a frequency to another.

If one considers a circuit excited by two sine - e.m.f. having the frequencies f_1, f_2, that contains at least such a nonlinear element, the voltage across and the current flowing through this one are time double - periodic functions. The harmonic spectrum of these functions contains components having combined frequencies of the form $pf_1 + qf_2$, $(p, q = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty)$ [1].

Supposing that certain conditions are satisfied, these signals can be expanded in double-complex-Fourier-series of the form [2]:

$$(1) \qquad \begin{cases} u(t) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} U_{p,q}\, e^{j(p\omega_1+q\omega_2)t}, \\ i(t) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} I_{p,q}\, e^{j(p\omega_1+q\omega_2)t}, \end{cases}$$

where

$$(2) \qquad \begin{cases} \underline{U}_{p,q} = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} d(\omega_2 t) \int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-j(p\omega_1+q\omega_2)t}\, d(\omega_1 t), \\ \underline{I}_{p,q} = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} d(\omega_2 t) \int_0^{2\pi} i(t)\, e^{-j(p\omega_1+q\omega_2)t}\, d(\omega_1 t). \end{cases}$$

*) Presented at the jubilee scientific session „60 Years of Electrotechnical Education in Jassy", December 21—23, 1972.

The active power transfered betwen the current and voltage harmonics of order p and q satisfy the relations :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{pP_{p,q}}{p\omega_1+q\omega_2}=0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{qP_{p,q}}{p\omega_1+q\omega_2}=0, \tag{3}$$

found by Manley and Rowe [3]. Here

$$P_{p,q}=\mathcal{R}e(\underline{S}_{p,q})=\mathcal{R}e(\underline{U}_{p,q}\,\underline{I}^{*}_{p,q}), \tag{4}$$

with $\underline{U}_{p,q}$, $\underline{I}_{p,q}$ given by (2).

2. In a previous paper [4], we have showed that relations (3) are particular cases of more general relations of the form :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{pP_{p,q}}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{qP_{p,q}}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0, \tag{5}$$

$$(k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

called *generalized Manley-Rowe relations.*

The aim of this paper is to show that relations of the form (5) are satisfied not only by the functions $u(t)$, $i(t)$ defined by (1), but, more generally, and under certain assumptions to be ascertained, by any pair of scalar or vectorial functions that are double-periodic w.r.t. the same scalar indepedent variable and having the same periods. Such relations find important applications in energy balance of nonlinear electromagnetic fields and circuits.

3. Let be two scalar functions $f(t)$, $g(t)$, double-periodic w.r.t. the scalar indepedent variable t and having the same periods $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$. Under certain conditions supposed to be satisfied, these functions can be expanded in double-complex-Fourier-series [2] :

$$\begin{cases} f(t)=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\underline{F}_{p,q}\,e^{j(p\omega_1+q\omega_2)t}, \\ g(t)=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\underline{G}_{p,q}\,e^{j(p\omega_1+q\omega_2)t}, \end{cases} \tag{6}$$

with

$$\begin{cases} \underline{F}_{p,q}=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}d(\omega_2 t)\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-j(p\omega_1+q\omega_2)t}\,d(\omega_1 t), \\ \underline{G}_{p,q}=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}d(\omega_2 t)\int_0^{2\pi}g(t)\,e^{-j(p\omega_1+q\omega_2)}\,d(\omega_2 t), \end{cases} \tag{7}$$

the coefficients $\underline{F}_{p,q}$, $\underline{G}_{p,q}$ satisfying the relations :

(8) $$\underline{F}_{p,q} = \underline{F}^*_{-p,-q},\ \underline{F}_{-p,-q} = \underline{F}^*_{p,q};\quad \underline{G}_{p,q} = \underline{G}^*_{-p,-q},\ \underline{G}_{-p,-q} = \underline{G}^*_{p,q}.$$

If (7) is multiplied by $\mathrm{j}p\underline{G}^*_{p,q}$ and the sumations for all integer values (positive, negative or zero) of p, q is carried out, one obtains :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}p\underline{F}_{p,q}\,\underline{G}^*_{p,q} =$$

(9) $$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}p\underline{G}^*_{p,q}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t}\,\mathrm{d}(\omega_1 t).$$

Taking into account that

(10) $$\frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}p\underline{G}_{p,q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t} = -\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}p\underline{G}^*_{p,q}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t},$$

relations (9) becomes :

(11) $$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}p\underline{F}_{p,q}\underline{G}^*_{p,q} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t).$$

For $\omega_2 t = \text{const.}$,

(12) $$\frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t)\Big|_{\omega_2 t=\text{const.}} = \mathrm{d}g(t),$$

and therefore

(13) $$\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t) = \int_{g(\omega_1 t=0)}^{g(\omega_1 t=2\pi)} f(t)\,\mathrm{d}g(t) = \oint f(g)\,\mathrm{d}g,$$

due to the periodic character of the function $g(t)$. If we presume that $f(g)$ is single-valued then :

(14) $$\oint f(g)\mathrm{d}g = 0$$

and relation (11) becomes

(15) $$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\underline{F}_{p,q}\underline{G}^*_{p,q} = 0.$$

By separating the real and imaginary parts one gets :

(16) $$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{G}^*_{p,q}) = 0,\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{G}^*_{p,q}) = 0.$$

Analogically the following relations can be found :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\underline{F}_{p,q}\underline{G}^{*}_{p,q} = 0 \tag{17}$$

and respectively

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{G}^{*}_{p,q}) = 0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{G}^{*}_{p,q}) = 0. \tag{18}$$

Similar results can be obtained if one of the functions $f(t)$, $g(t)$, or both, are vectorial functions of the same scalar independent variable t. In the first case one obtains :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \tag{19}$$

and in the second one, either :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \tag{20}$$

or

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} q\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{G}}^{*}_{p,q} = 0, \tag{21}$$

and, obviously, analougous relations satisfied by the real and imaginary components. Such relations, which comprise the Manley-Rowe relations as particular cases, as will be shown in what follows, were partially established in a previous paper [5]. Also, in the particular case when $f(t)$ represents the voltage across the nonlinear element and $g(t)$, the current, one finds the relations obtained in [6].

5. Let us assume that the function $g(t)$ is continuous and has derivatives up the order k, inclusively. Since $g(t)$ is double-periodic w.r.t. the scalar indepedent variable t, its derivatives are also double-periodic w.r.t. the same variable and have the same period. Therefore the k-th derivative of $g(t)$ can be expanded in a double-Fourier-series :

$$m(t) = \frac{\mathrm{d}^k g(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \underline{\boldsymbol{M}}_{p,q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t}, \tag{22}$$

where

$$\underline{\boldsymbol{M}}_{p,q} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} m(t)\,\mathrm{e}^{-j(p\omega_1+q\omega_2)t}\,\mathrm{d}(\omega_1 t), \tag{23}$$

with

$$\underline{M}_{p,q} = \underline{M}^*_{-p,-q}, \quad \underline{M}_{-p,-q} = \underline{M}^*_{p,q}. \tag{24}$$

From (6) and (22) one gets :

$$M_{p,q} = \mathrm{j}^k (p\omega_1 + q\omega_2)^k \underline{G}_{p,q}, \tag{25}$$

so as relations (16), (17) can be written in the form :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q}}{(p\omega_1+q\omega_2)^k} = 0, \tag{26}$$

and

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = 0, \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = 0. \tag{27}$$

Taking into account (8) and (24) we can write the equalities :

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q}) = \mathcal{R}e(\underline{F}^*_{-p,-q}\underline{M}_{-p,-q}) = \mathcal{R}e(\underline{F}_{-p,-q}\underline{M}^*_{-p,-q}), \\ \mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q}) = \mathcal{I}m(\underline{F}^*_{-p,-q}\underline{M}_{-p,-q}) = -\mathcal{I}m(\underline{F}_{-p,-q}\underline{M}^*_{-p,-q}). \end{cases} \tag{28}$$

By splitting into two parts the range of the values taken by the coefficient p, the expressions (27) can be written in the form :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = \sum_{p=-\infty}^{0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k}, \\ \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = \sum_{p=-\infty}^{0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k}. \end{cases} \tag{29}$$

If the signs of p, q in the first terms of the right sides of (29) are changed and relations (28) are taken into account it results :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = 0, \quad (k = 1, 3, 5, \ldots), \tag{30}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^*_{p,q})}{(p\omega_1 + q\omega_2)^k} = 0, \quad (k = 0, 2, 4, \ldots). \tag{31}$$

In relations (30) only odd values of index k are taken into accunt because for even values, the terms in the right side of relations (29) are equal and have opposite sign. For similar reasons in (25) only even values for index k are considered.

In a similar way the following relations can be established :

$$(32)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=0}^{\infty}\dfrac{q\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0, & (k=1,3,5,\ldots),\\ \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=0}^{\infty}\dfrac{q\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\underline{M}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0, & (k=0,2,4,\ldots). \end{cases}$$

6. Since $g(t)$ is double-periodic, the integral

$$(33)\qquad n(t)=\underbrace{\iint\ldots\int}_{l} g(t)\mathrm{d}t^l$$

is, under certain conditions[1]), a double-periodic function as well, and can be expanded in a double-Fourier-series :

$$(35)\qquad n(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\underline{N}_{p,q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t},$$

where

$$(36)\qquad \underline{N}_{p,q}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} n(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(p\omega_1+q\omega_2)t}\,\mathrm{d}(\omega_1 t),$$

with

$$(37)\qquad \underline{N}_{p,q}=\underline{N}^{*}_{-p,-q},\quad \underline{N}_{-p,-q}=\underline{N}^{*}_{p,q}.$$

From (6_2) and (36) it results

$$(38)\qquad N_{p,q}=\frac{\underline{G}_{p,q}}{\mathrm{j}^l(p\omega_1+q\omega_2)^l},$$

therefore relations (16), (17) become :

$$(39)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^{*}_{p,q}=0$$

and

---

[1]) the constants introduced by each integral being zero.

$$(40)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0, \\ \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0, \end{cases}$$

respectively.

If relations (8) and (37) are considered, it results:

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=\mathcal{R}e(\underline{F}^*_{-p,-q}\,\underline{N}_{-p,-q})=\mathcal{R}e(\underline{F}_{-p,-q}\,\underline{N}^*_{-p,-q}), \\ \mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=\mathcal{I}m(\underline{F}^*_{-p,-q}\,\underline{N}_{-p,-q})=-\mathcal{I}m(\underline{F}_{-p,-q}\,\underline{N}^*_{-p,-q}). \end{cases}$$

By splitting into two the range of values taken by the coefficient p the summations in (40) can be written in the form:

$$(42)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})= \\ \quad=\sum\limits_{p=-\infty}^{0}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})+ \\ \quad+\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q}), \\ \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})= \\ \quad=\sum\limits_{p=-\infty}^{0}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})+ \\ \quad+\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q}). \end{cases}$$

If the signs of the coefficients p, q in the first terms of the right sides of (42) are changed and relations (41) are considered, it results:

$$(43)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0,\qquad (l=1,\ 3,\ 5,\ldots),$$

$$(44)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} p(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0,\qquad (l=0,\ 2,\ 4,\ldots).$$

In these relations are keep only certain parity of the index l, the reason being similar to that we used for the index k in relations (30) and (31).

Following a similar way we can get the relations :

$$(45)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} q(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0,\qquad (l=1,3,5,\ldots),$$

$$(46)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} q(p\omega_1+q\omega_2)^l\,\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{N}^*_{p,q})=0,\qquad (l=0,2,4,\ldots).$$

7. The pairs (30), (43); (31), (44) ; (32), (45) ; (33), (46) can be written in equivalent unified forms :

$$(47)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(48)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

$$(49)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{R}e(\underline{F}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(50)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{I}m(\underline{F}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

where

$$(51)\qquad r(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\underline{R}_{p,q}\,e^{j(p\omega_1+q\omega_2)t},$$

is a scalar double-periodic function, of the scalar independent variable t, having the periods $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$.

Relations of the type (47)...(50) are obtained in the case if one of the functions $f(t)$, $g(t)$, or both, are vectorial functions of the independent variable t. In the first case one gets :

$$(52)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(53)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

$$(54)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(55)\qquad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\,\underline{R}^*_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

and in the second case either :

$$(56)\quad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(57)\quad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

$$(58)\quad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(59)\quad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\cdot\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

or

$$(60)\quad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(61)\quad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{p\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots),$$

$$(62)\quad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{R}e(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+q\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots),$$

$$(63)\quad \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q\mathcal{I}m(\underline{\mathbf{F}}_{p,q}\times\underline{\mathbf{R}}^{*}_{p,q})}{(p\omega_1+p\omega_2)^k}=0,\qquad (k=\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots).$$

For $k=1$ one finds the relations established in [5]. Also, in the particular case, the double-periodic functions $f(t)$, $r(t)$ are, the former, the voltage across the nonlinear element, and, the latter, the current flowing through that element, one gets the generalised Manley-Rowe relations (5).

Relations (47)...(50), (52)...(63), which stem from (16) and (18), represent a set of generalised Manley-Rowe relations, finding important applications in the energy balance of nonlinear electromagnetic fields and circuits. Expressions (16) and (18) can be referred to as *generating Manley-Rowe relations.*

Received, February 1, 1973

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Engineering
and Electrical Measurement

REFERENCES

1. Тафт В. А., *Электрические цепи с переменными параметрами.* Изд. «Энергия», М., 1968.
2. Толстов Г. П., *Ряды Фурье.* ГИТТЛ, М. - Л., 1951, гл. **XII.**
3. Manley J., Rowe H. E., *Some General Properties of Nonlinear Elements. I. General Energy Relations.* Proceed. of the I.R.E, **44**, 7, 904—913 (1956)

4 Rosman H., *Eine Verallgemeinerung der Manley—Rowe Beziehungen.* XVII. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau, 1972 (in press).
5 Rosman H., *Generalized Manley-Rowe Relations.* Bul. Inst. polit. Iaşi, s. III, XVIII (XXII), *1—2*, 15—21 (1972).
6 Rosman H., *Über die Manley-Rowe Beziehungen.* XVI. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau, *5*, 23—28 (1969).

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A RELAŢIILOR MANLEY-ROWE

(Rezumat)

Se demonstrează că orice pereche de funcţii scalare sau vectoriale, dublu-periodice în raport cu aceeaşi variabilă scalară independentă şi de aceleaşi perioade, satisfac relaţiile (16), (18), numite *relaţii Manley - Rowe generatoare.* Prin particularizări adecvate ale acestora fie se pot regăsi relaţiile Manley - Rowe, cunoscute în literatura de specialitate, fie se pot stabili generalizări ale acestora.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. C. 621.314.263

SYNTHESIS OF RESISTIVE FREQUENCY MULTIPLIERS

BY

SAVEL MITREA

1. Introduction

It is known that transfer characteristics of ideal single-phase-supplied frequency multipliers represent Tchebysheff's polynomials of first species defined over the interval $[-1, 1]$. These functions can be written in two forms:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{— trigonometric form,} \tag{1.1}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n] \quad \text{— algebraic form,} \tag{1.2}$$

where n, positive integer, is the degree of polynomial.

By letting $x = \sin \omega t$ in (1.1) or (1.2) one gets $T_n(\sin \omega t) = \cos n\omega t$. Therefore if the transfer characteristic of a device represents a Tchebysheff's polynomial, by applying to its input an unit-amplitude sine-signal, having a certain frequency, one gets at the output an unit-amplitude sine-signal whose frequency is n times the input one.

In the present paper, the author suggests several ways for frequency multiplication, n being odd integer, by making use of piece-wise linear resistive networks. The synthesis of piece-wise linear driving-point functions is well covered in literature, therefore, the main concern will be directed to combining such functions in order to obtain transfer characteristics required by frequency multiplication.

2. The Use of Tchebysheff's Polynomials in Trigonometric Form

From (1.1) one may see, by inspection, that, excepting $n = 1$, these functions posses negative-slope portions. It is known that one-port piece-wise linear networks exhibit monotonically increasing characteristics only. A suitable combination of one-port networks, resulting in a multi-port network, will meet the requirements.

If a suitable monotonically-increasing function is added to (1.1) a new function is obtained which may increase motonically as well. The function that is to be added to (1.1) can be found by considering the first derivative of (1.1) :

$$\frac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin (n \arccos x). \tag{2.1}$$

The extremal values of (2.1) lie, approximately, on the envelopes $\pm n/\sqrt{1-x^2}$ which are monotonic functions. It is obvious that the minima of function :

$$\frac{\mathrm{d}F_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin (n \arccos x) + \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.2}$$

will be approximately zero.

By integrating (2.2) one gets, for n odd :

$$F_n(x) = T_n(x) + n \arcsin x. \tag{2.3}$$

Function (2.3) increases monotonically since its first derivative does not take negative values. Such functions can be synthesized by using one-port piece-wise networks.

The required transfer characteristic is obtained trough a network that performs the subtraction :

$$T_n(x) = F_n(x) - n \arcsin x. \tag{2.4}$$

Function $n \arcsin x$ can be replaced by a simpler one, a straight line. One can see that the extremal values of (2.1) increase with x. The gratest negative extremal value is found at $x = \pm \cos (3\pi/2n)$. By following a reasoning similar to the previous one a function is found :

$$G_n(x) = T_n(x) + \frac{nx}{\sin (3\pi/2n)}, \tag{2.5}$$

so as the transfer characteristic will be obtained by using a device that performs the subtraction :

$$T_n(x) = G_n(x) - \frac{nx}{\sin (3\pi/2n).} \tag{2.6}$$

The extremal values of the first derivative of (2.5) are positive, except for the last one, at $x = \pm \cos (3\pi/2n)$, wich is zero.

Networks performing subtractions (2.4) or (2.6) are given in Fig. 1 *a*, *b*. The input signals to the network represented in Fig. 1 *a* are provided by two unit-amplitude sine-voltage sources. The output signal, i_L, is obtained in branch *ab*. Nonlinear resistors R_1 and R_2 posses driving-point characteristics indicated on the diagram. The input signals to the

network represented in Fig. 1 *b* are two unit-amplitude sine-currents. In order to meet the requirements posed to sine-current sources resistances R must be as great as possible.

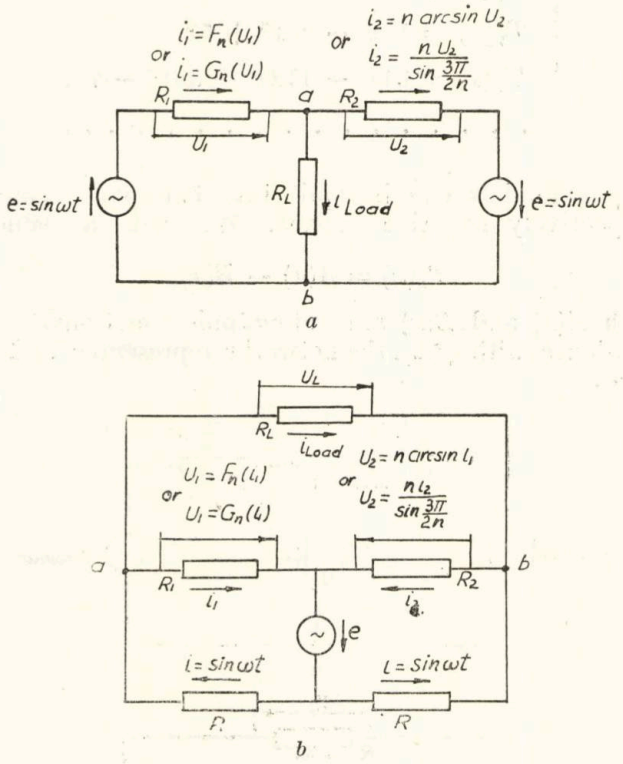


Fig. 1

At this point **an** important feature concerning the performance of frequency multipliers must be drawn atention upon. Even if nonlinear characteristics were ideal the output signal would be sinusoidal only if $R_L = 0$ in Fig. 1 *a* and $R_L = \infty$ in Fig. 1 *b*. If we assume, for instance, that $R_L \neq 0$ in Fig. 1 *a*, the voltage drop across the load, having a frequency different from that of the input signal, will make voltages U_1 and U_2 be nonsinusoidal. This means that the conditions under wich we synthesized nonlinear characteristics are not fulfiled any more. Therefore in some cases filters have to be used in order to improve the waweform of output signal.

3. The Use of Tchebysheff's Polynomials in Algebraic Form

By letting $n = 3, 5, 7, \ldots$ in (1.2) one gets polynomials :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

These polynomials can be split into two parts containing positive and respectively negative terms. We get a general relation

$$(3.2)\qquad T_n(x) = A(x) - B(x),$$

in which both $A(x)$ and $B(x)$ are monotonic functions.

In accordance with (3.2), the networks represented in Fig. 2 *a*, *b* may be synthesized.

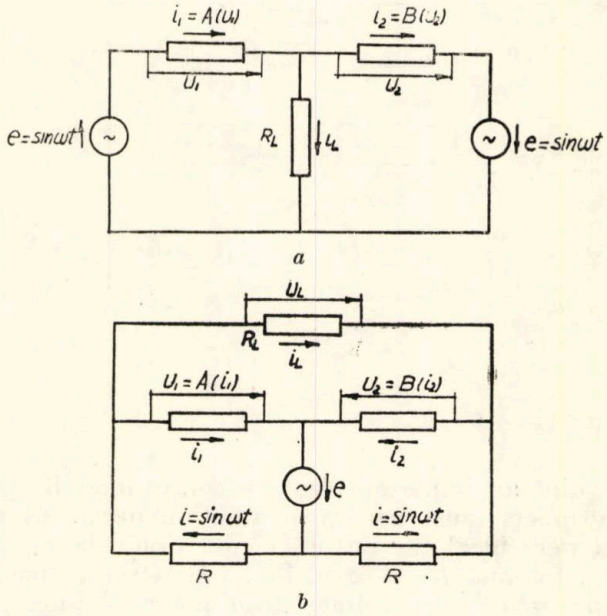


Fig. 2

The remarks made at the end of § 2 concerning the performance of frequency multipliers, when loaded, applie to this case as well.

4. Remarks on the Synthesis of Driving-point Functions

It is known that in the synthesis of driving-point functions, $u = f(i)$, with $R_d = du/di$ decreasing as i increases, constant voltage sources are used while in the case R_d are increasing functions, constant current sources are required.

All nonlinear functions encountered in this paper, apart from the case $n = 3$, posses both R_d — increasing and R_d — decreasing portions. Therefore in synthesizing such functions both constant-voltage and constant-current sources will be used. Taking into account that a good piecewise approximation of nonlinear functions requires a rather great number of sources, one would ask oneself wether such methods are advantageous or not.

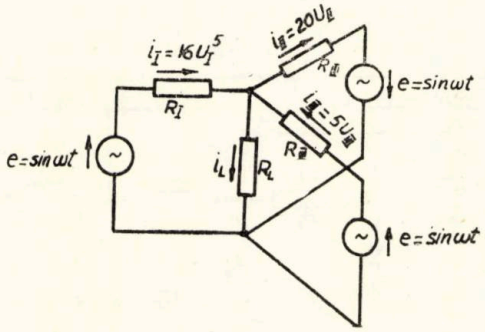


Fig. 3

As one can see from (3.1) frequency multipliers with sine-voltage input signals can be synthesized by using nonlinear one-port networks possesing R_d — decreasing functions. In this case only constant-voltage sources are necessary and they can be replaced by Zenner-diodes.

The transfer characteristic of a frequency quintupler having sine-voltage input signal will be :

$$T_n(u) = 16u^5 - 20u^3 + 5u. \tag{4.1}$$

Each term of this polynomial constitutes a monotonically increasing function, its derivative with respect to i being a decreasing or constant function.

The schematic diagram of such a quintupler is represented in Fig. 3 and it needs no further explanations as to how it works.

A function of the form $i = ku^m$ is represented in Fig. 4 *a*. The piece-wise synthesis of this function can be obtained by using the networks given in Fig. 4 *b* and 4 *c*.

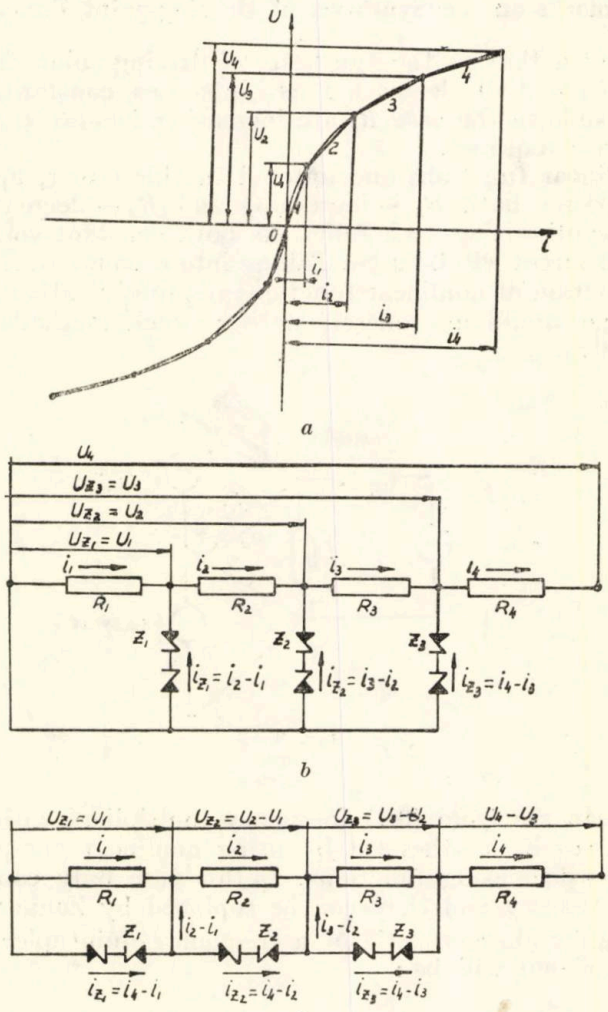


Fig. 4

Voltages and currents can be read directly on the graph and resistances are to be calculated by using the relations :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} R_1 = \dfrac{u_1}{i_1} - \dfrac{u_2 - u_1}{i_2}, \quad R_3 = \dfrac{u_3 - u_2}{i_3} - \dfrac{u_4 - u_3}{i_4}, \\ R_2 = \dfrac{u_2 - u_1}{i_2} - \dfrac{u_3 - u_2}{i_3}, \quad R_4 = \dfrac{u_4 - u_3}{i_4}. \end{cases}$$

Zenner diodes are back-to-back connected so as to ensure the symetry of characteristics about the origin.

5. Conclusions

Resistive frequency multipliers can be synthesized by using T c h e b y s h e f f's polynomials as their transfer characteristics. Since such characteristics posses negative-slope portions, frequency multiplying devices must be multi-port networks. Any branch of these networks has monotonical driving-point characteristic that can be synthesized by using known methods. In order to avoid the use of active components, as constant-voltage and constant-current sources, in this synthesis, it is shown that certain types of frequency multipliers can be constructed by using resistors and Zenner-diodes only.

Received, February 20, 1973

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Engineering
and Electrical Measurements

SINTEZA MULTIPLICATOARELOR DE FRECVENŢĂ REZISTIVE

(Rezumat)

Pe baza polinoamelor C e b î ş e v, ca funcţii care reprezintă caracteristica de transfer, se procedează la sinteza multiplicatoarelor de frecvenţă rezistive, utilizînd caracteristici neliniare liniarizate pe porţiuni. Se arată că realizarea anumitor tipuri de multiplicatoare este posibilă prin utilizarea exclusivă a unor elemente pasive ca rezistoare liniare şi diode Zenner.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. K. 538.551.25; 621.3.012

ÜBER EINIGE GEOMETRISCHE ORTSKURVEN BEI VIELFACHEN FERRORESONANZKREISEN*)

VON

NORBERT ZITRON und ILIE POPESCU

1. Allgemeines

Die vielfache Ferrorezonanz erscheint, zum Beispiel, in Kreisen die nichtlineare gesteuerte Spulen und lineare Kondensatoren enthalten [1]. Obwohl das Prozeß eine besondere praktische Wichtigkeit ausweißt, wurde er nicht zufriedenstellend untersucht.

Die Vorgänge, die mit der vielfachen Ferroresonanzerscheinung in Verbindung sind, wurden in wenigen Arbeiten [2], [3], die nicht alle Eigenschaften diesen komplexen Prozesses klärten, analysiert.

In vorliegender Arbeit wird die Ferroresonanz in einem aus einer gesteuerten Spule mit Eisenkern mit auxiliärer Polarisierung und einem linearen Kondensator bestehenden Kreis studiert. Die Untersuchung des Kreises wird unter der Voraussetzung des Trägheitswesen vorgenommen. Es wird gezeigt daß der Kreis bei der Steuerungsstromänderung vier unterschidlieche Ferroresonanzregime präsentiert.

2. Annäherung der Steuerungskennlinie der nichtlinearen Spule

Es wird der Kreis aus Abb. 1 betrachtet, wobei der Kondensator C mit einem Zweig der eine nichtlineare gesteuerte Spule mit auxiliären Polarisierung und ein Widerstand R, welcher auch den Verlustwiderstand der Spule einschließt, enthielt, geschaltet ist.

Es ist bekannt, daß die Steuerungskennlinie der nichtlinearen Spule mit auxiliärer Polarisierung, für rektanguläre Eisenkerne, den Verlauf aus Abb. 2 hat. Diese Kurve kann durch Geradeabschnitte angenähert werden.

---

*) Mitgeteilt an der wissentschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Cluj, 22.—23. Dezember 1969.

Die Abschnittsgleichung sind folgende:

$$(1)\quad \begin{cases} (AB) & I = k, \quad \text{für} \quad I_c \in [0, I_{cI}], \\ (BC) & I = -k_1 I_c + k_2, \quad \text{für} \quad I_c \in [I_{cI}, I_{cII}], \\ (CD) & I = k_1 I_c + k_3, \quad \text{für} \quad I_c \in [I_{cII}, I_{cIII}], \\ (DE) & I = k, \quad \text{für} \quad I_c > I_{cIII}, \end{cases}$$

wobei:

$$k_1 = \frac{I_{II} - I_I}{I_{cIII} - I_{cII}} = \frac{I_{II} - I_I}{I_{cI} - I_{cII}}, \quad k_2 = I_I + kI_{cII}, \quad k_3 = I_I - kI_{cII}.$$

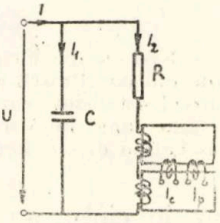


Abb. 1

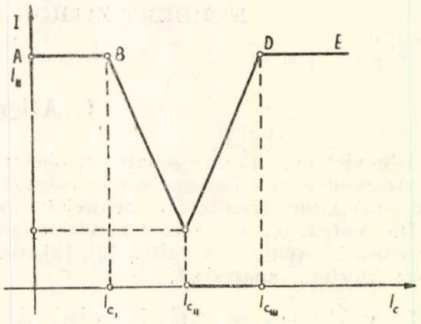


Abb. 2

3. Untersuchung des Ferroresonanzverhalten bei der Parameteränderung

Weil die Steuerungskennlinie bei konstanter Spannung dargesttelt ist, kann man den Blindwiderstand der Spule durch die Gleichung

$$(2)\quad x_L = \frac{U}{I} = \frac{k_0}{I},$$

ausdrücken.

Unter Betrachtung der vorausgesetzten Kreisträgheit hat die äquivalente Kreisadmittanz folgenden Ausdruck:

$$(3)\quad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}x_L} = \frac{R}{R^2 + x_L^2} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{x_L}{R^2 + x_L^2}\right).$$

Um die Resonanzbedingung zu erfüllen muß der imaginäre Teil aus (3) gleich Null sein:

$$\omega C - \frac{x_L}{R^2 + x_L^2} = 0. \tag{4}$$

Es wird weiterhin die Gleichung (4), im Falle der Kreisparameteränderung, untersucht. Wenn U, I_c und I_p konstant sind, dann hat x_L das Wert x_{L_0}. In diesem Fall nimmt (4) die Form :

$$\omega C - \frac{x_{L_0}}{R^2 + x_{L_0}^2} = 0. \tag{5}$$

Aus der Untersuchung der Gleichung (5) folgt, daß bei der Kapazitäts- und auch Widerstandsänderung man nur zu einem Ferroresonanzregime, sowie bei den Kreisen mit den gleichen linearen Elementen, erhalten kann. Die Werte der Kapazität und des Widerstands, bei welchen die Ferroresonanz erscheint, sind folgende :

$$C_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{x_{L_0}}{R^2 + x_{L_0}^2}, \qquad R_0 = \sqrt{\frac{x_{L_0}}{\omega C} - x_{L_0}^2}. \tag{6}$$

Die geometrische Ortskurven für diese Fälle sind denen, die aus der Analyse der linearen Kreisen bekannt sind, gleich.

Eine interessante Eigenschaft zeigt der Kreis aus Abb. 1 im Falle der Steuerungsstromänderung. Bei der Steuerungsstromänderung nimmt die Gleichung (4), für jeden Geradenabschnitt der Steuerungskennlinie, die Form :

$$\begin{cases} (AB) & \omega C - \dfrac{k_0/k}{R^2 + k_0^2/k^2} = 0, \\ (BC) & \omega C - \dfrac{k_0/(-k_1 I_c + k_2)}{R^2 + [k_0/(-k_1 I_c + k_2)]^2}, \\ (CD) & \omega C - \dfrac{k_0/(k_1 I_c + k_3)}{R^2 + [k_0/(k_1 I_c + k_3)]^2}, \\ (DE) & \omega C - \dfrac{k_0/k}{R^2 + k_0^2/k^2} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Die erste und letzte aus den Gleichungen (7) können nicht durch die Steuerungsstromänderung befriedigt werden. In allgemeinem, um die anderen zwei zu befriedigen müßen diese größer als Null sein. Die zweite und dritte Gleichung ergeben :

$$(8) \qquad I_{c_{1,2}} =$$

$$= \frac{2k_1k_2R^2\omega C - k_0k_1 \pm \sqrt{(2k_1k_2R^2\omega C - k_0k_1)^2 - 4R^2\omega Ck_1^2(k_0^2 - k_0k_2 + k_2^2R^2\omega C)}}{2R^2\omega Ck_1^2},$$

$$(9) \qquad I_{c_{3,4}} =$$

$$= \frac{k_0k_1 - 2k_1k_3R^2\omega C \pm \sqrt{(k_0k_1 - 2k_1k_3R^2\omega C)^2 - 4R^2\omega Ck_1^2(k_0^2 - k_0k_3 + k_3^2R^2\omega C)}}{2R^2\omega Ck_1^2}.$$

Hieraus folgt daß bei der Steuerungsstromänderung in einer bestimmten Richtung kann der Kreis vier Resonanzregime, die sich mit den Gleichungen (8) und (9) bestimmen, präsentieren.

Wenn man statt einer gesteurten Spule mit auxiliären Polarisierung eine Gesamtheit von zwei gesteuerten in Reihe geschalteten Spulen, eine mit $I_p = 0$ und die andere mit $I_p \neq 0$ benützt, dann hat die Steuerungskennlinie der Gesamtheit den Verlauf aus Abb. 3.

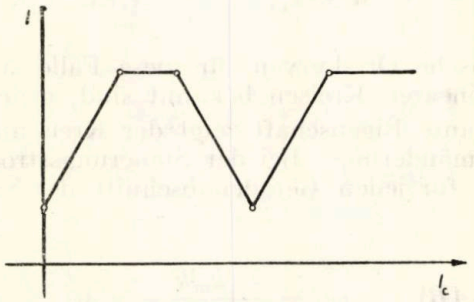


Abb. 3

Man kann leicht zeigen, dass in diesem Fall der Kreis sechs Ferroresonanzregime bei der Steuerungsstromänderung besitzt. Es folgt, in allgemeinem, dass wenn man eine Gesamtheit von n gesteuerten in Reihe geschalteten Spulen mit verschiedenen Polarisierungsströmen (alle von Null verschieden) benützt, können $4n$ Resonanzregime erscheinen. Im Falle, daß bei einer Spule der Polarisierungsstrom gleich Null ist, ergeben sich nur $4n - 2$ Resonanzregime.

4. Erfahrungsmässige Ergebnisse

Die Versuche wurden an hand einer Anlage derer Schaltung in Abb. 1 gezeigt ist durchgeführt. Man hat Kerne aus Mumetall mit den Abmessungen von $24 \times 20 \times 2 \times 0{,}35$ mm benützt. Die Windungszahl der

Arbeitswicklungen war 2×350, der Steuerungswicklungen von 1 050 und der Polarisierungswicklungen 700. Der Kreis wurde mit einer sinusförmiger Spannung von 50 Hz gespeist.

Die Steuerungskennlinien der Spule bei $U = 40$ V für $I_p = 0$ und $I_p = 800$ mA sind in Abb. 4 dargestellt.

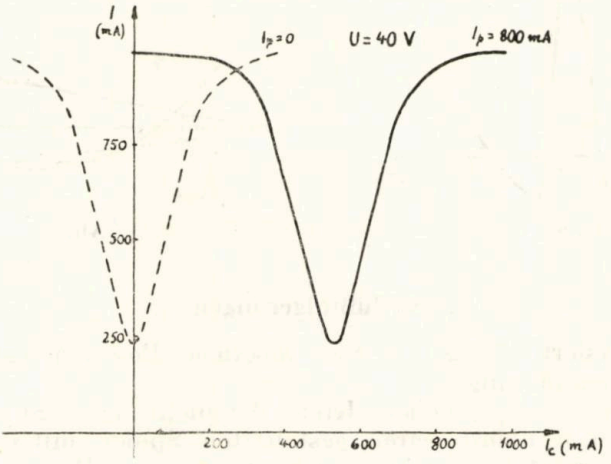


Abb. 4

Abb. 5 zeigt die geometrische Ortskurve des Kreises bei der Steuerungsstromänderung für $U = 40$ V, $I_p = 800$ mA, $C = 26$ μF. Wenn der Steuerungstrom gleich Null ist befindet sich der Arbeitspunkt in A. Ändert man den Steuerungsstrom dann wird erst die Kurve von A bis B und nachher von B bis A durchlaufen. Es ergäben sich vier Resonanzregime.

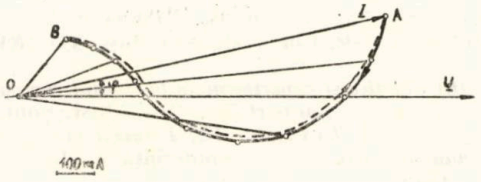


Abb. 5

Die Kennlinie $\varphi\,(I_c)$ ist in Abb. 6 gezeigt. Aus dieser Abbildung folgt, daß es vier Resonanzregime ($\varphi = 0$), die man für vier unterschiedliche Steuerungsstromwerte erhält, vorhanden sind.

In Abb. 7 ist die geometrische Ortskurve bei der Steuerungsstromänderung, im Falle daß $I_p = 0$, dargestellt. Man bemerkt, daß jetzt die Steuerungskennlinie symmetrisch zu Oy ist und darum sind bei der Steuerungsstromänderung nur zwei Resonanzregime vorhanden.

Weil die geometrischen Ortskurven entschprechend der Kapazitäts- und Widerstandsänderung sich mit denen von der Analyse der linearen Kreisen ähneln wurden sie nicht in der Arbeit angegeben.

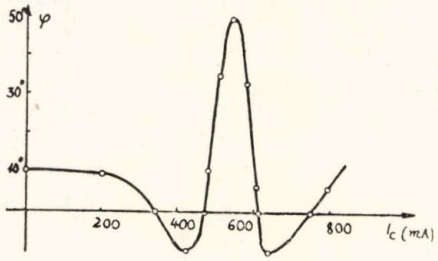


Abb. 6

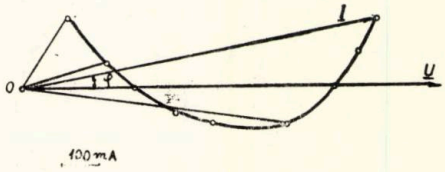


Abb. 7

5. Schlußfolgerungen

Der analysierte Kreis hat vier mögliche Resonanzregime bei der Steuerungsstromänderung.

Falls man, in angegebenem Kreis, die nichtlineare Spule mit einer Gesamtheit von n nichtlinearen gesteuerten Spulen mit verschiedenen Polarisierungen ersetzt, so können $4n$ oder $4n - 2$ Resonanzregime bei der Steuerungsstromänderung erlangt werden.

Eingegangen am 20. Mai 1972

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl fur Elektrotechnik und
Elektrische Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Savin Gh., Mitrea S., Popescu I., Simion E., Zitron N., *Circuit ferrorésonnant multistable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *1–2*, 341–346 (1968).
2. Simion E., *Contribuţii teoretice şi experimentale la studiul comportării circuitelor dublu ferorezonante la variaţia parametrilor.* Diss., Inst. polit. Iaşi, 1968.
3. Savin Gh., Popescu I., Zitron N., *Ferorezonanţa în circuite cu bobine neliniare comandate prin reacţie.* Conferinţa a II-a a electricienilor, Buc., 23–26 sept. 1969.

ASUPRA UNOR DIAGRAME - LOC GEOMETRIC ÎN CIRCUITE MULTIFERORezonante

(Rezumat)

Considerînd bobina neliniară comandată ca element inerţial de circuit se analizează diagramele-loc geometric care rezultă la variaţia parametrilor circuitelor dublu- şi multiferorezonante.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C.Z. 621.396.619

STUDIUL UNUI MODULATOR MAGNETIC CU IEŞIREA PE FRECVENŢA FUNDAMENTALĂ.

DE

CAMELIA ANDRONE

1. Introducere

Este cunoscut faptul că amplificatoarele de curent continuu, cu semnal purtător modulat, folosesc ca principiu convertirea semnalului slab, de curent continuu, într-un semnal de curent alternativ care apoi este amplificat cu ajutorul unui amplificator de curent alternativ, demodulat cu ajutorul unui demodulator sensibil la fază pentru ca în final să se obţină o tensiune de ieşire continuă, amplificată, de polaritate reversibilă şi proporţională cu semnalul de intrare de c.c. De asemenea se cunoaşte faptul că un amplificator clasic de c.a. este mai stabil decît unul de curent continuu. Din acest punct de vedere este mai raţional ca într-un astfel de scop să fie utilizat, ca prim etaj, un modulator magnetic cu rolul de convertor al curentului continuu în curent alternativ şi al cărui semnal de ieşire să fie apoi amplificat de amplificatorul de c.a. Condiţia pe care trebuie s-o îndeplinească modulatorul magnetic însuşi, în acest caz, este ca stabilitatea sa de zero să fie ridicată.

În schemele utilizate în mod curent este preferat modulatorul cu ieşire pe armonica a doua, din cauză că au putut fi imaginate, pentru aceastea din urmă, scheme mai simple, adică cu un număr mai mic de miezuri, principala sursă de derivă de zero. Pentru modulatoarele cu ieşire pe frecvenţa fundamentală, schemele în punte echilibrată, întîlnite în literatură [1], [2], comportă principial două sau patru miezuri magnetice.

Studiind procesul de modulaţie în amplitudine, realizat cu ajutorul bobinelor neliniare polarizate în curent continuu [4] şi presupunînd că frecvenţa semnalului modulator este zero (un semnal constant în timp), se determină comportarea unui modulator magnetic cu ieşirea pe frecvenţa fundamentală.

2. Consideraţii teoretice

Expresia unui semnal (de ex. flux magnetic) modulat în amplitudine este :

$$\psi = \Psi_{pm} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t, \tag{1}$$

în care Ω este pulsația semnalului modulator, ω cea a semnalului purtător, Ψ_{pm} este amplitudinea semnalului purtător iar m este gradul de modulație.

Elementul neliniar cu care se poate realiza procesul de modulare în amplitudine trebuie să aibă caracteristica aproximabilă prin următorul polinom :

$$y = a_1 x + a_2 x^2, \tag{2}$$

în care x este semnalul excitație iar y — semnalul răspuns. Dacă excitația are o formă sinusoidală de variație în timp, atunci răspunsul va avea forma unui semnal modulat în amplitudine, adică va conține frecvența purtătoare și cele două frecvențe laterale. De obicei elementele neliniare reale sînt caracterizate de caracteristici care conțin și termeni de grad superior lui doi. În acest caz, pe lîngă frecvențele arătate mai sus, semnalul răspuns va mai conține și alte frecvențe, care vor distorsiona semnalul modulat exprimat de relația (1). Pentru eliminarea acestora se utilizează schemele de modulatoare echilibrate. În literatură se întîlnesc astfel de scheme, dar realizate în principal cu rezistoare neliniare.

Pentru ca bobinele neliniare să poată fi utilizate în modulația de amplitudine, este necesar ca miezurile magnetice, care au o caracteristică cu simetrie impară, și aproximabile prin polinoame incomplete de forma

$$\psi = a_1 i - a_3 i^3, \tag{3}$$

$$i = c_1 \psi + c_3 \psi^3, \tag{4}$$

să fie polarizate în curent continuu. În cazul în care se poate considera că bobina lucrează în regim de magnetizare forțată, caracteristica miezului excitat și în curent continuu, devine de forma :

$$\psi = b_0 + b_1 i - b_2 i^2 - b_3 i^3, \tag{5}$$

în care coeficienții de aproximare $b_0, \ldots, b_3$, sînt de forma :

$$\begin{cases} b_0 = a_1 I_P - a_3 I_P^3, & b_2 = 3 a_3 I_P, \\ b_1 = a_1 - 3 a_3 I_P^2, & b_3 = a_3. \end{cases} \tag{6}$$

Dacă bobina este excitată fie în curent sinusoidal fie cu tensiune sinusoidală, semnalul răspuns, care poate fi fluxul magnetic sau curentul, are o expresie indentică cu cea a unui semnal modulat în amplitudine (1), conținînd în plus armonice date de termenii de grad superior ce intervin în relația (5) și care distorsionează semnalul modulat. În scopul eliminării acestor armonice se folosește un procedeu de compensare a lor.

Utilizînd schema de principiu a modulatoarelor echilibrate excitate în curent sinusoidal [4] (fig. 1) se poate stabili, pentru modulatorul magnetic cu ieșirea pe armonica fundamentală, schema din fig. 2. În această schemă frecvența modulatoare este $f_M = 0$, deci semnalul modulator este constant în timp, iar semnalul purtător este de frecvență $f_P = f$. Bobinele

neliniare din schemă prezintă o caracteristică de forma celei din relația (5), fiind polarizate de curentul continuu în același sens. În fig. 2 bobinele de excitație N, alimentate cu curent sinusoidal sau tensiune sinusoidală de frecvență f, sînt conectate în serie adițional ; bobinele de polarizare P, străbătute de curentul continuu de polarizare I_P, sînt conectate în serie adițional ; bobinele de intrare C, prin care circulă curentul continuu modulator, sînt conectate în serie diferențial ; bobinele de ieșire I sînt conectate de asemenea în serie diferențial.

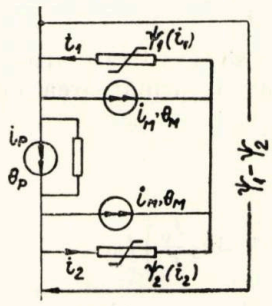


Fig. 1

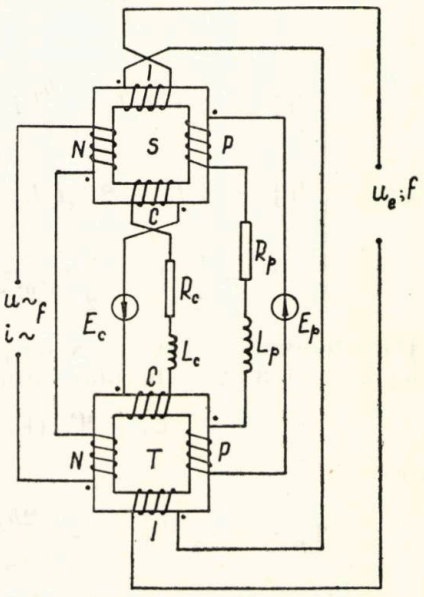


Fig. 2

Funcționarea schemei este analizată în următoarele ipoteze: a) miezurile magnetice sînt perfect identice și lipsite de histerezis magnetic, b) bobinele N, P, C și I sînt identice, adică au același număr de spire, c) semnalul de excitație este fie un curent sinusoidal fie o tensiune sinusoidală de frecvență f, d) în toate circuitele curenții de armonice pare, și în special de armonică doi, sînt ori atenuați complet, în care caz dispozitivul funcționează în regim de magnetizare forțată, ori lăsați să circule liber, în care caz dispozitivul funcționează în regim de magnetizare liberă.

2.1. Modulatorul magnetic cu ieșire pe frecvența fundamentală, excitat prin curent sinusoidal, în regim de magnetizare forțată

Conform schemei din fig. 2, solenațiile de excitație pentru cele două miezuri sînt :

(7) $i_1 = I_m \cos \omega t + I_0$, (8) $i_2 = I_m \cos \omega t - I_0$.

Prin urmare, fluxurile în cele două miezuri sînt, conform relației (3),

(9) $$\psi_1 = b_0 + b_1 i_1 - b_2 i_1^2 - b_3 i_1^3,$$

(10) $$\psi_2 = b_0 + b_1 i_2 - b_2 i_2^2 - b_3 i_2^3.$$

Ținînd cont de relația (7), fluxul ψ_1, în primul miez, este :

(11) $$\psi_1 = \Psi_0^1 + \Psi_{1m}^1 \cos \omega t - \Psi_{2m}^1 \cos 2\omega t - \Psi_{3m}^1 \cos 3\omega t,$$

în care :

(12)
$$\begin{cases} \Psi_0^1 = b_0 + b_1 I_0 - \dfrac{b_2}{2} I_m^2 - b_2 I_0^2 - b_3 I_0^3 - \dfrac{3}{2} b_3 I_0 I_m^2 , \\ \Psi_{1m}^1 = b_1 I_m - 2 b_2 I_0 I_m - \dfrac{3}{4} b_3 I_m^3 - 3 b_3 I_0^2 I_m , \\ \Psi_{2m}^1 = \dfrac{b_2}{2} I_m^2 + \dfrac{3}{2} b_3 I_0 I_m^2 , \quad \Psi_{3m}^1 = \dfrac{b_3}{4} I_m^3 . \end{cases}$$

Dacă în expresia (11) ar exista posibilitatea să fie filtrate armonicele de rang 0, 2 și 3 ale fluxului, atunci ψ_1 ar avea următoarea formă :

(13) $$\psi_1 = \Psi_m (1 + m) \cos \omega t,$$

în care :

(14) $$\Psi_m = b_1 I_m , \; m = - \left(\frac{2 b_2}{I_m} + \frac{3}{4} b_3 I_m + 3 b_3 \frac{I_0}{I_m} \right) I_0,$$

adică expresia unei unde modulate în amplitudine în care pulsația modulatoare are valoarea zero.

Acest scop este parțial realizat cu ajutorul schemei din fig. 2. Fluxul ψ_2 din miezul doi, are o expresie similară cu cea a lui ψ_1, adică :

(15) $$\psi_2 = \Psi_0^2 + \Psi_{1m}^2 \cos \omega t - \Psi_{2m}^2 \cos 2\omega t - \Psi_{3m}^2 \cos 3\omega t.$$

în care :

(16)
$$\begin{cases} \Psi_0^2 = b_0 - b_1 I_0 - \dfrac{b_2}{2} I_m^2 - b_2 I_0^2 + b_3 I_0^3 + \dfrac{3}{2} b_3 I_0 I_m^2 , \\ \Psi_{1m}^2 = b_1 I_m + 2 b_2 I_0 I_m - \dfrac{3}{4} b_3 I_m^2 - 3 b_3 I_0^2 I_m , \\ \Psi_{2m}^2 = \dfrac{b_2}{2} I_m^2 - \dfrac{3}{2} b_3 I_0 I_m^2 , \quad \Psi_{3m}^2 = \dfrac{b_3}{4} I_m^3 . \end{cases}$$

Pentru determinarea formei semnalului de ieșire interesează diferența celor două fluxuri, care este de forma :

$$\psi_1 - \psi_2 = 2b_1 I_0 - 2b_3 I_0^3 - 3b_3 I_0 I_m^2 - 4b_2 I_m I_0 \cos \omega t - \\ - 3b_3 I_0 I_m^2 \cos 2\omega t. \tag{17}$$

Tensiunea de ieșire a modulatorului este :

$$u_e = \frac{\mathrm{d}(\psi_1 - \psi_2)}{\mathrm{d}t} = 4b_2 \omega I_0 I_m \sin \omega t + 6b_3 \omega I_0 I_m^2 \sin 2\omega t. \tag{18}$$

Dacă se ține seama de relațiile (5), atunci tensiunea de ieșire se poate scrie sub forma :

$$u_e = 12a_3 \omega I_P I_0 I_m \sin \omega t + 6a_3 \omega I_0 I_m^2 \sin 2\omega t. \tag{19}$$

Primul termen al acestei tensiuni constituie o componentă sinusoidală de aceeași frecvență cu cea a curentului de excitație. Amplitudinea ei depinde de cea a curentului sinusoidal de excitație (I_m), de curentul de polarizare (I_P) și de curentul de intrare (I_0), produsul lor fiind multiplicat cu $12a_3\omega$. În afară de această componentă, tensiunea de ieșire conține și o armonică de ordinul doi. Amplitudinea ei, însă, este mult mai mai redusă decît cea a termenului fundamental. În plus ea poate fi eliminată dacă este îndeplinită condiția :

$$I_P \gg \frac{I_m}{2}. \tag{20}$$

În cazul cînd curentul continuu de intrare I_0 își schimbă sensul, tensiunea de ieșire își modifică faza cu 180°, adică atît termenul fundamental cît și armonica de rang doi își schimbă faza cu 180°.

Trebuie remarcat faptul că dacă în dispozitivul din fig. 2 se elimină circuitul de polarizare, atunci ceea ce rămîne nu reprezintă altceva decît dispozitivul care se întîlnește în literatură sub denumirea de modulator magnetic cu ieșirea pe armonica a doua. Se poate aprecia deci că același modulator funcționînd cu ieșirea pe termenul fundamental furnizează un semnal de ieșire de amplitudine sensibil mai mare decît în cazul cînd funcționează cu ieșirea pe armonica a doua.

2.2. Modulatorul magnetic cu ieșirea pe frecvența fundamentală, excitat cu tensiune sinusoidală, în regim de magnetizare forțată

Cînd dispozitivul din fig. 2 este alimentat cu tensiune sinusoidală ecuațiile ce descriu funcționarea lui sînt :

$$\begin{cases} i_1 = d_0 + d_1\psi_1 + d_2\psi_1^2 + d_3\psi_1^3, \\ i_2 = d_0 + d_1\psi_2 + d_2\psi_2^2 + d_3\psi_2^3, \end{cases} \tag{21}$$

$$(22) \qquad u = \frac{\mathrm{d}(\psi_1 + \psi_2)}{\mathrm{d}t} = U_m \cos \omega t, \qquad (23) \qquad u_e = \frac{d(\psi_1 - \psi_2)}{\mathrm{d}t},$$

în care primele două ecuații reprezintă caracteristicile de magnetizare, identice, ale celor două miezuri, $i_1(\psi_1)$ respectiv $i_2(\psi_2)$.

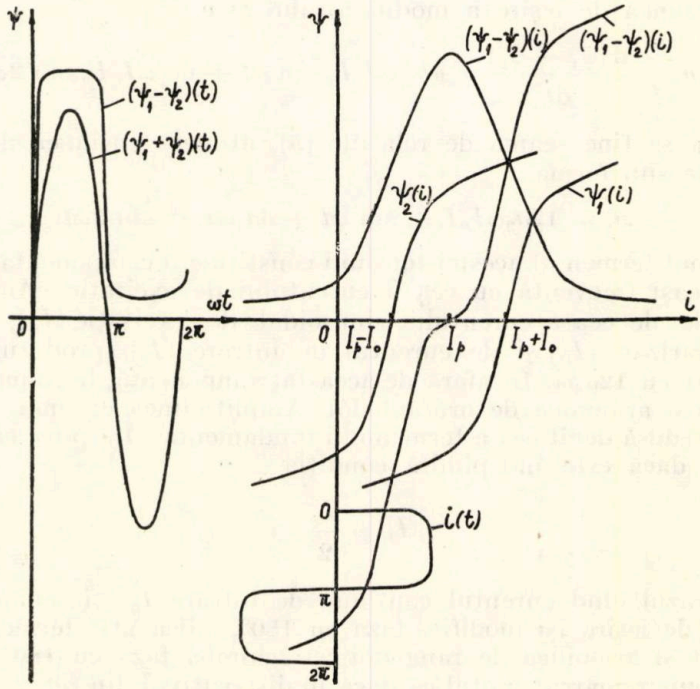


Fig. 3

În acest caz este mai simplă o rezolvare grafică (fig. 3) în care sînt reprezentate fluxurile $\psi_1 = \psi_1(i_1)$ și $\psi_2 = \psi_2(i_2)$ în cele două miezuri, suma lor $\psi_1 + \psi_2 = (\psi_1 + \psi_2)(i)$, care, conform relației (22), variază sinusoidal în timp ; ea este aleasă de așa manieră încît să nu aducă la saturație miezurile. De asemenea este reprezentată diferența celor două fluxuri, $\psi_1 - \psi_2 = (\psi_1 - \psi_2)(i)$. În ipotezele făcute, rezultă printr-o construcție grafică curentul din circuitul de excitație, de o formă aproape dreptunghiulară, $i = i(t)$. Cu ajutorul acestui curent și al curbei $(\psi_1 - \psi_2)(i)$ se deduce forma de variație în timp a diferenței fluxurilor. Derivata acesteia reprezintă, conform relației (23), tensiunea la ieșire u_e. Este ușor de observat că diferența fluxurilor celor două miezuri, deci și tensiunea la ieșire, are aceeași frecvență ca și cea a tensiunii de excitație ; de asemenea aceste curbe se apropie cu atît mai mult de o sinusoidă cu cît curentul din

circuit este mai apropiat de sinusoidă. Se poate aprecia că urmărindu-se o formă cît mai bună pentru tensiunea de ieșire, trebuie folosit cazul cînd dispozitivul este alimentat prin curent sinusoidal. Cînd este folosită alimentarea cu tensiune sinusoidală există un punct optim pentru care tensiunea la ieșire este sinusoidală, fiind necesar, în acest scop, să fie îndeplinită condiția :

$$I_0 = I_P \,. \tag{24}$$

2.3. Modulatorul magnetic cu ieșirea pe frecvența fundamentală în regim de magnetizare liberă

În acest caz se dovedește experimental că la excitarea atît prin curent sinusoidal cît și cu tensiune sinusoidală, diferența celor două fluxuri este minimă fiind reprezentată de o dreaptă orizontală paralelă cu axa

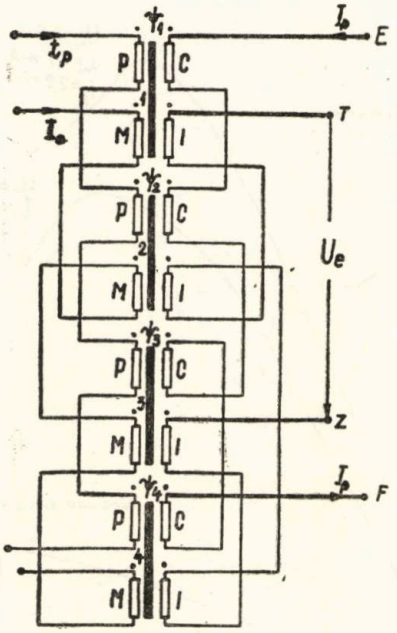


Fig. 4

curentului. Este evident că dacă diferența fluxurilor este o constantă atunci tensiunea la ieșire, care este derivata acestei diferențe, este nulă. Această concluzie se verifică experimental.

2.4. Modulatorul magnetic cu patru miezuri cu ieșirea pe frecvența fundamentală, excitat prin curent sinusoidal

Pentru eliminarea totală a armonicei de rang doi a tensiunii de la ieșirea modulatorului din fig. 2, dată de relația (19), se poate folosi un procedeu de compensare cu ajutorul schemei din fig. 4. Această schemă este constituită din două modulatoare de tipul celui din fig. 2, polarizate însă în sensuri contrare și montate diferențial. În acest caz amplitudinea tensiunii la ieșire, de frecvență f, este dublă față de cea obținută în cazul dispozitivului din fig. 2 :

$$u_e = 24a_3\omega I_P I_0 I_m \sin \omega t. \tag{25}$$

3. Rezultate experimentale

Partea experimentală și de verificare a rezultatelor obținute teoretic, a fost efectuată pe miezuri din mumetal, de dimensiuni mici. În fig. 5 sînt date cîteva caracteristici de ieșire, $U_e = f(I_0)$, pentru cazul cînd

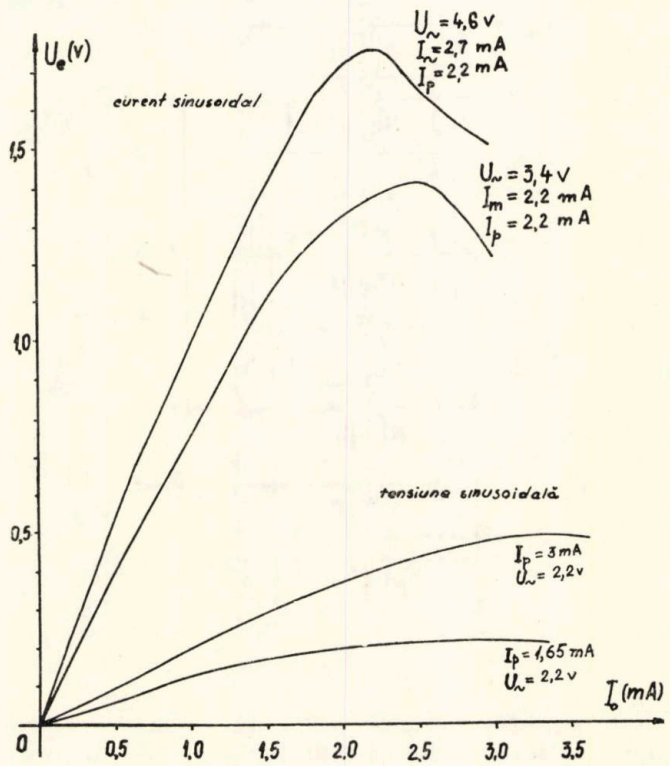


Fig. 5

amplitudinea curentului alternativ de excitație, I_m, precum și curentul de polarizare, I_P, sînt menținuți constanți, la curent de excitație sinusoidal. Se poate aprecia că aceste caracteristici prezintă o importantă porțiune pe care variația valorii efective a tensiunii de ieșire în raport cu curentul continuu de intrare este liniară. În fig. 6 sînt reprezentate și cîteva caracteristici ale unui modulator magnetic cu patru miezuri cu ieșire pe frecvența fundamentală, excitat cu tensiune sinusoidală, tip care se găsește descris în literatură [1]. În fig. 7 sînt reprezentate comparativ rezultatele experimentale obținute în următoarele cazuri : *a* — modulatorul studiat, excitat prin curent sinusoidal, *b* — modulatorul studiat,

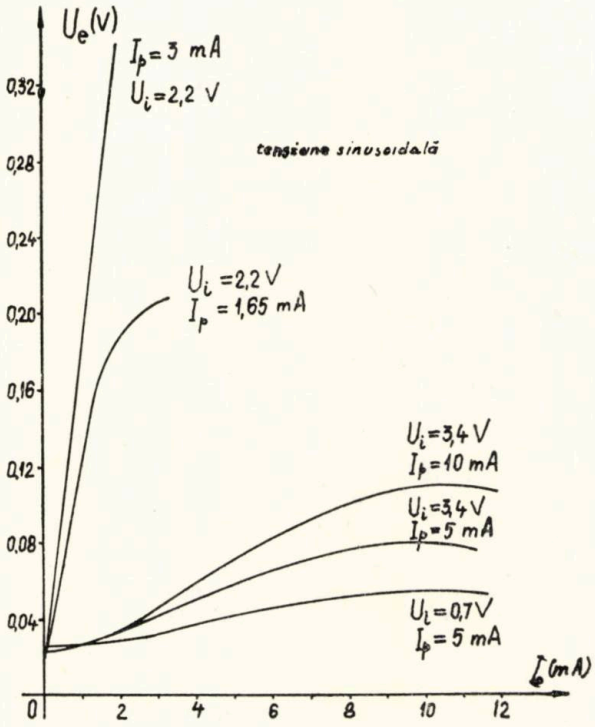


Fig. 6

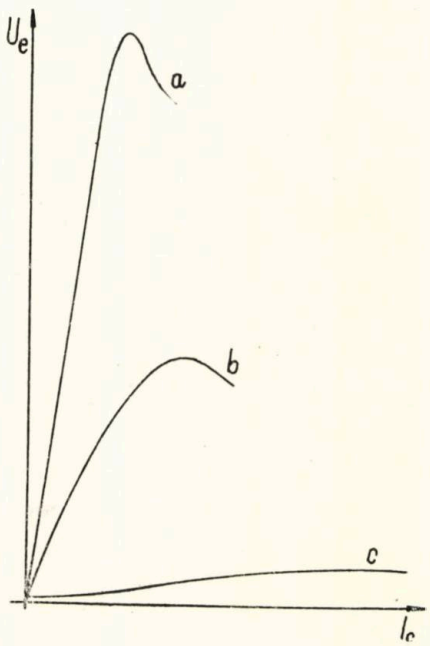


Fig. 7

excitat cu tensiune sinusoidală, *c* — modulator magnetic cu patru miezuri, excitat cu tensiune sinusoidală Apare evidentă comportarea superioară a modulatorului cu două miezuri analizat, în același domeniu de valori pentru curentul continuu de intrare. Se constată o comportare mai bună, din punct de vedere al amplificării, a modulatorului alimentat prin curent sinusoidal, concluzie la care s-a ajuns și pe cale teoretică.

4. Concluzii

1. Modulatoarele magnetice cu ieşire pe frecvenţa fundamentală reprezintă un caz particular al modulatoarelor magnetice de amplitudine, şi anume cînd frecvenţa modulatoare este egală cu zero.

2. Amplificarea şi sensibilitatea modulatorului cu ieşire pe frecvenţa fundamentală sînt sensibil mai mari decît pentru modulatoarele cu ieşire pe frecvenţa dublă.

3. Caracteristicile de ieşire ale modulatorului cu ieşire pe frecvenţa fundamentală, alimentat în curent sinusoidal, sînt superioare celor obţinute la alimentarea cu tensiune sinusoidală.

Primită la 12 februarie 1973

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică şi măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Geyger W. A., *Dispozitive magnetice neliniare,* (trad. din l. engl.), Ed. Tehn., Buc., 1968.
2. Розенблат М. А., *Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники.* М., 1966.
3. Savin Gh., Rosman H., *Circuite electrice neliniare şi parametrice.* Ed. Tehn., Buc., 1973.
4. Androne C., *Amplitudenmodulation mit gieichstromvormagnetisierten nichtlinearen Induktivitäten.* Nachrichtentechnik, 22, *10*, 340, 341 (1972).

ANALYSIS OF THE MAGNETIC-FIRST-HARMONIC-MODULATOR

(Summary)

A theoretical and graphyical analysis of the magnetic-first-harmonic-modulator as a particular case of the magnetic amplitude-modulators is made. A different behaviour of it, when the excitation signal is a sine-current or a sine-voltage, is deduced.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. C. 621.318.423; 621.396.621.52

ANALYTICAL CONSIDERATIONS CONCERNING THE CHARACTERISTICS OF FEEDBACK-CONTROLLED NONLINEAR REACTORS*)

BY

M. ANTONESCU

1. Generalities

Feedback-controlled nonlinear reactors are widely used in control systems. The interest in these devices is due to particular properties they exhibit, the most important ones being an increased gain — as compared to that of usual controlled nonlinear reactors — and asymmetrical control characteristics. Some economical advantages are to be added to that as well.

Phenomena wich take place in nonlinear circuits containing such reactors associated with linear capacitors are little studied experimentally [4]. An analytical aproach to this problem has not been attempted, as yet, due to the absence of an expression that could approximate the characteristics of these reactors.

In this paper an approximating function to these characteristics, that allows an analytical treatment of the circuit trough a modified Duffing's equation, has been found.

2. Characteristics of Feedback Controlled Nonlinear Reactors

The characteristics of a feedback-controlled nonlinear reactor, represented in Fig. 1, are to be investigated. The feedback used in this case is external, of magnetic type. The magnetomotive force of rectified load current may have the same polarity as the bias magnetomotive force—positive feedback—or an opposite one—negative feedback.

It is to be noted that such a reactor is, in fact, an usual nonlinear controlled reactor, but it works under a variable control current. In Fig. 2 the characteristics of a positive feedback-controlled nonlinear reactor are presented, and in Fig. 3 a negative feedback-controlled one. The quan-

*) Presented at the Scientific Session „60 Years of Electrotechnical Education in Jassy", December 21—23, 1972.

tities related by these characteristics are r.m.s. voltage and r.m.s. current since there is a similarity between current-to-flux-characteristics in instantaneous values and current-to-voltage characteristics in r.m.s. values.

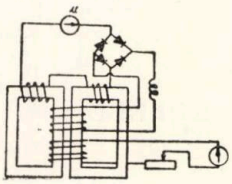


Fig. 1

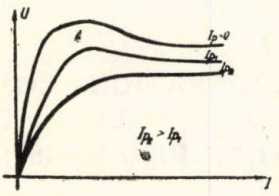


Fig. 2

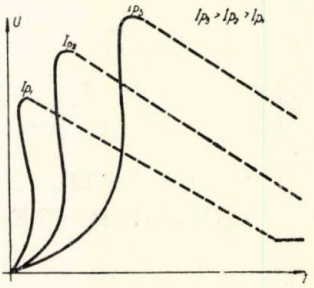


Fig. 3

3. Analytical Approximation of Characteristics of Feedback-Controlled Nonlinear Reactors

It is known that the current-to-flux-characteristic, in normalized values $u\,(v)$, of a controlled nonlinear reactor, can be approximated trough an incomplete fifth degree polynomial :

$$u = c_1 v - c_3 v^3 + c_5 v^5 , \tag{1}$$

where coefficients c_{2k+1}, $(k = 0, 1, 2)$, depend on magnetic properties of core material and magnitude of control current. It has been shown [4] that, for a given reactor, between coefficients and the control current the following relationship exists :

$$c_{2k+1} = a_{2k+1} - b_{2k+1}\, e^{-z}, \tag{2}$$

where z stands for the normalized control current. In addition to that, for any controll current, the coefficients satisfy relation :

$$9c_3^2 - 20c_1 c_5 < 0, \tag{3}$$

that ensure a monotonically increasing feature of function $u\,(v)$.

As it has been stated before, a feedback-controlled nonlinear reactor is considered as an usual controlled nonlinear reactor working under a variable control current, consequently, its characteristic can be approximated by the function :

$$u = (a_1 - b_1\, e^{-ku \pm z_0})\, v - (a_3 - b_3\, e^{-ku \pm z_0})\, v^3 + (a_5 - b_5\, e^{-ku \pm z_0})\, v^5. \tag{4}$$

In (4) $\pm z_0$ stands for the normalized bias current, its sign corresponding to positive and negative feedback respectively. In the same relation, k establishes a proportionality between load and control windings magnetomotive forces.

In what follows the shape of the implicite function :

$$F(u, v) = (a_1 - b_1 e^{-ku \pm z_0}) v - (a_3 - b_3 e^{-ku \pm z_0}) v^3 + \\ + (a_5 - b_5 e^{-ku \pm z_0}) v^5 - u = 0, \tag{5}$$

which is derived from (4), will be considered.

Function $F(u, v)$ has no extremal values with respect to u. In effect, equation :

$$\frac{\partial}{\partial v} F(u, v) = 0 \tag{6}$$

has the roots :

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{3(a_3 - b_3 e^{-ku \pm z_0}) \pm \sqrt{9(a_3 - b_3 e^{-ku \pm z_0})^2 - 20(a_1 - b_1 e^{-ku \pm z_0})(a_5 - b_5 e^{-ku \pm z_0})}}{10 (a_5 - b_5 e^{-ku \pm z_0})}}, \tag{7}$$

which, taking into consideration (3), are imaginary.

In order to find the extremal values of function $F(u, v)$ with respect to v, equation :

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u, v) = 0 \tag{8}$$

is considered.

By expanding e^{-ku} and retaining the first three terms only, (8) becomes :

$$\frac{k^3 u^2}{2} e^{\pm z_0} y - k^2 e^{\pm z_0} yu + k e^{\pm z_0} y - 1 = 0, \tag{9}$$

where :

$$y = b_1 v - b_3 v^3 + b_5 v^5. \tag{10}$$

Taking into account that :

$$y(v) = - y(-v), \tag{11}$$

the roots of equation (9) have the form :

$$u = \frac{\pm k^2 y \pm \sqrt{k^3 (\pm 2y e^{\mp z_0} - ky^2)}}{\pm k^3 y}. \tag{12}$$

These roots are real if :

$$\pm 2y e^{\mp z_0} - ky^2 > 0, \tag{13}$$

which is tantamount to :

$$-\frac{2e^{\mp z_0}}{k} > y > \frac{2e^{\mp z_0}}{k}. \tag{14}$$

If y satisfies (14), function $F(u, v)$ has four distinct extremal values with respect to v. For $y = 0$, only two extremal values are obtained.

A closer look at relation (14) enable us to formulate the following conclusions :

a) In the absence of feedback ($k = 0$) no extremal values exist either with respect to u or v and one finds the case of an usual controlled nonlinear reactor.

b) In the absence of bias current ($z_0 = 0$) four extremal values with respect to v may exist, on the condition that y were sufficiently large ; these extremal values may disappear if k is small.

c) In the case of positive feedback (14) becomes :

$$-\frac{2e^{z_0}}{k} > y > \frac{2e^{z_0}}{k}. \tag{15}$$

For z_0 sufficiently small the extremal values with respect to v may exist but they will disappear when z_0 increases.

d) In the case of negative feedback (14) takes on the form :

$$-\frac{2e^{-z_0}}{k} > y > \frac{2e^{-z_0}}{k}. \tag{16}$$

Assuming $z_0 = 0$, four extremal values with respect to v exist if k and y are sufficiently large (case b)). If $z_0 \neq 0$, the existence of extremal values is strenghtened in the case of negative feedback.

In addition to that, for z_0 and y sufficiently large, the extremal values exist for any $k \neq 0$.

4. Experimental Results

Theoretical conclusions were experimentally verified by using mumetal core feedback-controled reactor. The similarity between current to flux characteristics in instantaneous values and current to voltage characteristics in r.m.s. values has been taken into account. The characteristics are approximated trough :

$$u = (1{,}78 \cdot 10^3 - 1{,}54 \cdot 10^3 e^{-3u \pm z_0}) v - (0{,}261 \cdot 10^9 - \\ - 0{,}163 \cdot 10^9 e^{-3u \pm z_0}) v^3 + (0{,}1621 \cdot 10^{14} - 0{,}0618 \cdot 10^{14} e^{-3u \pm z_0}) v^5. \tag{17}$$

Theoretical and experimental characteristics in normalized quantities, are presented in Fig. 4, 5, for typical positive and negative cases.

A satisfactory agreement between theory and experiment has been found.

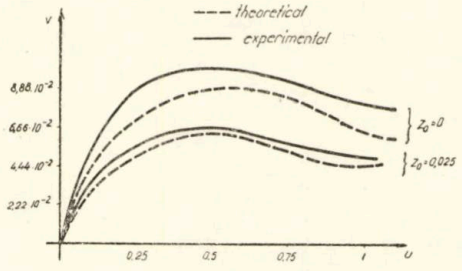
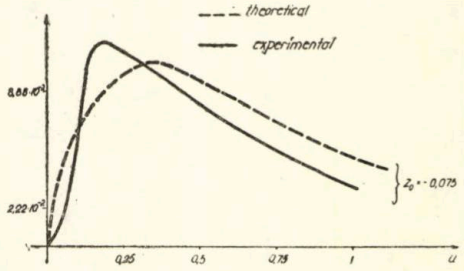


Fig. 4



Fig, 5

5. Conclusions

An analytical approximation for the characteristics of feedback controlled nonlinear reactors has been found. The satisfactory agreement between theory and experiments allows the use of these functions in analytical investigations of phenomena taking place in ferroresonant circuits containing feedback-controlled nonlinear reactors.

Received, February 10, 1973

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Engineering
and Electrical Measurements

REFERENCES

1. Geyger W. A., *Magnetic Amplifier Circuits*. Mc. Graw-Hill, New-York, 1957.
2. Hayashi C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Mc. Graw-Hill, New-York, 1964.
3. Розенблат М. А., *Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники*. Изд. «Наука», М., 1966.
4. Savin Gh., Popescu I., Zitron N., *Ferorezonanța în circuite cu bobine neliniare comandate prin reacție*. Presented at the Second Conference of Electrical Engineers, Bucharest, Sept. 23–26 1969.
5. Popescu I., Zitron N., *Studiul regimului permanent în circuitul dubluferorezonant la variația curentului continuu de comandă*. Bul. Inst. polit. Iași, s. III, XVIII (XXII), *3–4* (1972).
6. Fitzgerald S. A., *Feedback in Magnetic Amplifiers*. J. of the Franklin Inst., **247–248**, 223–243 (1949).

CONSIDERAȚII ANALITICE PRIVIND CARACTERISTICILE BOBINELOR NELINIARE COMANDATE PRIN REACȚIE

(Rezumat)

Ținînd seama de forma caracteristicilor bobinelor neliniare comandate prin reacție, se propune o expresie analitică pentru a le aproxima. Se verifică teoretic și experimental relația propusă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. D. 539; 621.385.2

UNE NOUVELLE INTERPRÉTATION DE QUELQUES PHÉNOMÈNES ÉLECTRONIQUES DE LA JONCTION SEMI-CONDUCTRICE ABRUPTE PN*)

PAR

HARI HERŞCOVICI et EMIL LUCA

1. Introduction

Nous nous rapportons dans le présent travail à la relation qui définit la valeur de la capacité de diffusion de la jonction semi-conducritce abrupte PN :

$$C_d = C_{d0}\, e^{qU_a/kT}, \tag{1}$$

ou l'on a noté par : U_a — la tension appliquée à la jonction, q — la charge de l'électron, k — la constante de Boltzmann, T — la température absolue de la jonction et C_{d0} — la capacité de diffusion de la diode, due au transport de porteurs minoritaires, en l'absence d'une tension appliquée, définie par la relation :

$$C_{d0} = \frac{q^2 A}{2kT}(L_p p_n + L_n n_p), \tag{2}$$

avec les notation supplémentaires : A — la section de la jonction, D_p et D_n — les constantes de diffusion, L_p et L_n — les longueurs de diffusion des porteurs, p_n et n_p — les concentrations de porteurs minoritaires.

L'expérimentation des diodes à silicium alliées du type Zener de faible puissance de la série DZ 300, a montré une totale nonconcordance entre la capacité de diffusion et les relations (1) et (2).

La capacité de diffusion d'une jonction semiconductrice PN en étant l'effet du transport de porteurs à travers les régions neutres de

*) Présenté lors de la session scientifique jubiliaire „60 ans d'enseignement électrotechnique à Jassy", 21—23 décembre 1972.

la jonction, son étude exige forcément l'étude des lois que engendrent la circulation du courant à travers la jonction PN réelle.

Les mesures effectuées sur un grand nombre de diodes à silicium alliées ont mené aux résultats sélectés dans le tableau 1.

Tableau 1

Diode	C_{d0} F	C_d	m
1 B	$4{,}25.10^{-15}$	$\sim e^{qUa/mkT}$	1,58
2 B	$4{,}3.10^{-15}$		1,62
3 B	$4{,}4.10^{-15}$		1,65

Pour les valeurs connues suivantes, soit pour le silicium en général, soit pour les diodes expérimentées dans le cadre de cette étude et livrées par la fabrique productrice [7] : $kT/q = 25$ mV à $T = 300°$ K ; $q = 1{,}6.10^{-19}$ A.s ; $A = 3{,}5.10^{-3}$ cm^2 (valeur nominale, variable au cours de la fabrication) ; $D_p = kTu_p/q = 12{,}5$ cm^2/s, où u_p est la mobilité des trous dans le silicium ($= 500$ cm^2/V.s à 300° K ; $D_n = D_p u_n/u_p = 2{,}4\, D_p$, où u_n est la mobilité des électrons dans le silicium ($= 1\,200$ cm^2/V.s à 300° K) ; $L_p = 8.10^{-3}$ cm ; $L_n \cong L_p$; $p_n = 1\,125$ cm^2 ; $n_p = 22{,}5$ cm^{-3}, on peut calculer :

$$C_{d0} \cong \frac{q^2 A}{2kT} L_p\, p_n = 10^{-19}\ \text{F} \tag{3}$$

en constatant une différence appréciable entre les valeurs expérimentales et celles obtenues par voie théorique, de 4 ordres de grandeur. Cette différence ne peut pas être attribuée à la technologie de fabrication ou aux erreurs de mesure et de calcul.

Selon nos études on constate que les erreurs introduites dans les relations (1) et (2) sont dues au fait que, dans la détermination de ces relations on a toujours en vue l'équation de la diode idéale et pas celle de la diode réelle [1]...[8], [12], autrement dit, on ne tient pas compte du fait que pour des tensions relativement faibles ou moyennes appliquées à la jonction, le courant qui la traverse est déterminé principalement par les phénomènes de génération—récombination de porteurs dans la région de passage et dans une moindre mesure par le courant de diffusion et que ce fait a des conséquences portant sur la valeur de la capacité de diffusion.

Pour déterminer une relation plus correcte qui soit capable à définir la capacité de diffusion, il est nécessaire d'établir d'abord l'équation qui correspond au courant qui traverse la jonction.

Beaucoup d'auteurs ont effectué des études de ce genre fondées soit sur les phénomènes de génération—recombination, soit sur les phénomènes de surface [9], [10]. Les relations établies sont, dans la plupart des cas, très compliquées.

Dans ce qui suit on détermine une rélation simple pour la caractéristique courant—tension des diodes étudiées, et puis on essaie d'établir une relation qui exprime le plus exactement possible la valeur de la capacité de diffusion.

2. La caractéristique tension—courant de la jonction PN réelle

Pour simplifier les calculs on a supposé que la jonction PN est en réalité une jonction PIN où la couche de semiconducteur intrinsèque est très mince, tendant à zéro ; dans ce dernier cas les deux zones de passage s'unissent (fig. 1).

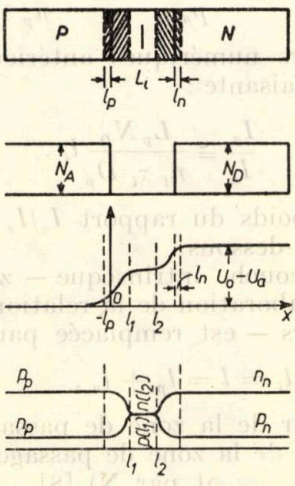


Fig. 1

Pour une telle diode on démontre [1] que :

$$I = I_s\,(e^{qU_a/kT} - 1) + \frac{I_g}{I_s}(e^{qU_a/2kT} - 1), \tag{4}$$

où

$$I_s = qA\left(\frac{D_p\,p_n}{L_p} + \frac{D_n\,n_p}{L_n}\right) \tag{5}$$

est le courant de saturation de la jonction dû a la génération thermique des porteurs dans les régions P et N, et

$$I_g = \frac{qn_i l_i A}{\tau_i} \tag{6}$$

représent la valeur du courant dû a la génération des porteurs dans la région intrinsèque.

Il en résulte que :

$$\frac{I_g}{I_s} = \frac{1}{n_i \frac{\tau_i}{l_i}\left(\frac{D_p}{L_p N_D} + \frac{D_n}{L_n N_A}\right)}, \tag{7}$$

où τ_i est la durée de vie des porteurs en excès dans la zone intrinsèque et N_D et N_A représentent les concentrations des atomes donneurs ionisés, respectivement des atomes accepteurs ionisés, en résultant les relations :

$$N_D = \frac{n_i^2}{p_n}, \quad N_A = \frac{n_i^2}{n_p}. \tag{8}$$

En employant les valeurs numériques antérieurs on peut écrire, avec une approximation satisfaisante :

$$\frac{I_g}{I_s} \cong \frac{L_p N_D}{n_i \tau_i D_p} l_i . \tag{9}$$

Pour apprécier le poids du rapport I_g/I_s dans la relation (4), on fait les approximations ci-dessous.

a) L'épaisseur de la couche intrinsèque — zone dans la quelle, selon la supposition faite à l'élaboration de la relation (4) a lieu le phénomène de génération de porteurs — est remplacée par :

$$l_i = l = l_p + l_n , \tag{10}$$

c'est-à-dire par l'épaisseur de la zone de passage de la jonction PN (l_p et l_n sont les profondeurs de la zone de passage vers le semi-conducteur marqué par P et respectivement par N) [8].

Pour déduire l'éppaisseur $l_i = l$ on utilise la relation connue :

$$l = \sqrt{1{,}11 \cdot 10^{-12} \frac{2\varepsilon (U_0 - U_a)}{q} \cdot \frac{n_n + p_p}{p_p n_n}}, \quad [\text{cm}], \tag{11}$$

où: ε est la constante diélectrique du silicium (= 11,8), U_0 — la tension de barrière ($\cong$ 0,9 V pour les diodes du type Zener qu'on a eu en vue (DZ 308) et n_n, p_p — les concentrations des porteurs majoritaires.

Par conséquent, on constate que l est fonction de U_a, donc I_g/I_s sera aussi fonction de U_a. On peut écrire, alors,

$$\frac{I_g}{I_s} = a\sqrt{U_0 - U_a}\,. \tag{12}$$

Pour les valeurs numériques mentionnées dans le présent travail on obtient :

$$\frac{I_g}{I_s} = 4{,}8 \cdot 10^4\sqrt{U_0 - U_a}\,. \tag{13}$$

b) La durée de vie des porteurs en excès dans la région intrinsèque est considérée comme égale à la durée de vie des porteurs en excès de la zonne de passage :

$$\tau_p = \frac{L_p^2}{D_p}, \qquad \tau_n = \frac{L_n^2}{D_n}. \tag{14}$$

en pouvant considérer comme ordre de grandeur $\tau_p \cong \tau_n$.

Les approximations introduites sont corrélées, compte tenu que l'approximation d'une zone intrinsèque avec une zone dottée doit mener au remplacement des phénomènes spécifiques à la zone intrinsèque par ceux de la zone dottée, c'est-à-dire au remplacement de τ_i par τ_p ou τ_n.

En ajoutant aussi aux grandeurs numériques antérieures les valeurs ci-dessous : $n_n = 2 \cdot 10^{17}$ cm^{-3}, $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} ; $p_p = 10^{19}$ cm^{-3}; $\tau_p = 5{,}1.10^{-6}$ s ; $N_D = 2.10^{17}$ cm^{-3}, fournies elles-aussi par la fabrique productrice, ou déduites des données fournies par elle [7], on détermine les valeurs l et I_g/I_s fonction de U_a (tableau 2).

Tableau 2

U_a [mV]	−100	0	100	250	500	600	650	700	750
l [10^{-5} cm]	2,86	2,72	2,56	2,31	1,81	1,57	1,43	1,28	1,11
I_g/I_s [$\times 10^4$]	4,8	4,57	4,3	3,88	3,05	2,67	2,4	2,15	1,87

Il en résulte que le deuxième terme de la relation (4) sera prépondérant tant que l'exponentielle $e^{qU_a/kT}$ ne dépassera la valeur de l'exponentielle $e^{qU_a/2kT}$ de plus de 3 ou 4 ordres de grandeur. Une illustration de cette condition est exposée dans le tableau 3.

Tableau 3

U_a [mV]		−100	0	50	100	250	500	600	650	700
$e^{qU_a/mkT}-1$		0,98	0	6,4	49	2.10^4	$4,8.10^8$	$2,5.10^{10}$	2.10^{11}	$1,45.10^{12}$
$\frac{I_q}{I_s}(e^{qU_a/mkT}-1)$	$m=1,6$	$4,4.10^4$	0	—	$4,82.10^5$	$1,99.10^7$	$8,25.10^9$	$8,45.10^{10}$	$2,69.10^{11}$	—
	$m=2$	$3,94.10^4$	0	—	$2,76.10^5$	$5,5.10^7$	$6,72.10^8$	5.10^9	$1,05.10^{10}$	—

On constate donc que, pour des tensions appliquées $U_a \leqslant 500$ mV, la relation (4) peut être écrite sous la forme :

$$I = I_g\,(e^{qU_a/2kT} - 1)\,. \tag{15}$$

En employant les relations (5) et (13) on déduit successivement : $I_s = 10^{-15}$ A et $I_g = 0{,}048.10^{-9}$ A.

Dans le tableau 4 on a inscrit nombre de résultats obtenus par voie expérimentalle :

Tableau 4

Diode	Courant de saturation A	m	Diode	Courant de saturation A	m
1 A	$0,32.10^{-9}$	1,7	1 B	$0,04.10^{-9}$	1,58
2 A	$0,136.10^{-9}$	1,7	2 B	$0,3.10^{-9}$	1,62
3 A	$0,018.10^{-9}$	2,0	3 B	$0,4.10^{-9}$	1,65

La valeur du courant de saturation de la diode — exprimée conformément aux phénomènes de génération dans la région de passage de la jonction — est assez proche du résultat des mesures expérimentalles.

Les différences doivent être attribuées surtout aux effets de surface [14] et au manque d'uniformité de la section des jonctions [15]. Encore une cause de nonconcordance peut être attribuée au fait qu'on a considéré une valeur moyenne pour le courant I_g.

Selon le tableau 4 il en résulte des différences entre les valeurs expérimentales et la valeur obtenue par voie théorique, à savoir entre 0,38 I_g et 8,35 $I_{g\text{théorique}}$. Cette variation coïncide d'une façon satisfaisante avec les valeurs calculées théoriquement dans [15], travail dans lequel on a analysé les modifications possibles de la relation (15) dûes aux effets de surface et aux variations de la surface effective de la jonction.

Mais, les effets de surface ne sont pas controlables que dans une mesure réduite pendant le processus technologique. De plus, la capacité de diffusion dépend de l'accumulation des charges électriques dans les régions neutres de la jonction et n'est pas influencée par les charges de la surface libre de la jonction (à voir les tableaux 1 et 4).

Pour ces raisons dans les calcules ci-dessous on va considérer toujours les valeurs du courant de la diode exprimées seulement par les effets de génération — récombination des porteurs dans la région de passage de la jonction.

La pratique montre que la relation (15) doit être écrite plus exactement sous la forme :

$$I = I_g(e^{q/U_a mkT} - 1), \tag{16}$$

où m prend le plus souvent la valeur 1,6...1,7. Pour des valeurs $m < 2$ l'approximation introduite à la déduction de la relation (15) est valable pour des tensions U_a qui dépassent 500 mV.

Pour des valeurs U_a pour lesquelles l'approximation (15) n'est plus valable (en général pour $U_a > 550$ mV) la relation (4) peut être écrite :

$$I \cong I_g \, e^{q U_a/mkT}\left(1 + \frac{I_s}{I_g} e^{\frac{qU_a}{kT}\cdot\frac{m-1}{m}}\right), \tag{17}$$

ou

$$I \cong I_g \, \gamma\,(U_a)\, e^{qU_a/mkT} \tag{18}$$

où

$$\gamma\,(U_a) = 1 + \frac{1}{a\sqrt{U_0 - U_a}} B_m^{U_a}, \tag{19}$$

avec

$$B_m = e^{\frac{q}{kT}\cdot\frac{m-1}{m}}. \tag{20}$$

Pour des valeurs m comprises entre 1,6 et 2 la fonction $\gamma\,(U_a)$ est donnée dans le tableau 6.

Tableau 6

U	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
$\frac{1}{a\sqrt{U_0 - U_a}} = \frac{I_s}{I_g}$	$2{,}03.10^{-5}$	$3{,}28.10^{-5}$	$3{,}75.10^{-5}$	$4{,}16.10^{-5}$	$4{,}65.10^{-5}$	$5{,}32.10^{-5}$	$6{,}57.10^{-5}$
$B^{U_a}_{1,6}$	$3{,}98.10^{2}$	$1{,}78.10^{3}$	$7{,}95.10^{3}$	$1{,}66.10^{4}$	$3{,}55.10^{4}$	$7{,}42.10^{4}$	$1{,}59.10^{5}$
$B^{U_a}_{2}$	$2{,}96.10^{3}$	$2{,}185.10^{4}$	$1{,}59.10^{5}$	$4{,}47.10^{5}$	$1{,}175.10^{6}$	$3{,}16.10^{6}$	—
$\frac{1}{a\sqrt{U_0 - U_a}} B^{U_a}_{1,6}$	0,008	0,0585	0,298	0,69	1,65	3,95	10,5
$\frac{1}{a\sqrt{U_0 - U_a}} B^{U_a}_{2}$	0,06	0,716	5,96	18,6	54,6	168	—
$\gamma_{1,6}$	1,008	1,0585	1,298	1,69	2,65	4,95	11,5
γ_2	1,06	1,716	6,96	19,6	55,6	169	—

Le tableau 6 met en évidence l'influence importante exercée par le coefficient m sur le domaine de valabilité de l'approximation (15) Dans le même tableau on a mis en évidence aussi la valeur du terme :

$$\frac{1}{a\sqrt{U_0 - U_a}} B^{U_a}_{m} = \frac{I_s}{I_g} e^{\frac{qU_a}{kT} \cdot \frac{m-1}{m}}. \tag{21}$$

afin qu'on puisse apprécier facilement le domaine U_a jusqu'où la fonction $e^{qU_a/mkT}$ est prépondérante ou comparable à la fonction $e^{qU_a/kT}$, respectivement le domaine des tensions au-dessus duquel on peut considérer que l'équation de la diode réelle satisfait — avec une bonne approximation — l'équation de la diode idéale déterminée par S h o k l e y.

La fonction $\gamma\,(U_a)$ peut être dénommée *fonction de transition*, ayant une valeur significative ainsi qu'une utilité pratique, uniquement dans le domaine des tensions où la valeur du courant traversant la jonction dépend tant du courant de diffusion que du courant de génération de porteurs dans la région de passage.

Pour ce domaine d'utilité la fonction $\gamma\,(U_a)$ est répresentée dans la fig. 2. On déduit, pour $m = 1, 6...2$,

a) le domaine de valabilité de la relation (15)

$$U_a < 0{,}45 \ldots 0{,}55 \text{ V} ;$$

b) le domaine de transition :

$$0{,}45 \ldots 0{,}55 \text{ V} \leqslant U_a < 0{,}62 \ldots 0{,}8 \text{ V} ;$$

c) le domaine de valabilité de l'équation idéale :

$$U_a \geqslant 0{,}62 \ldots 0{,}8 \text{ V} .$$

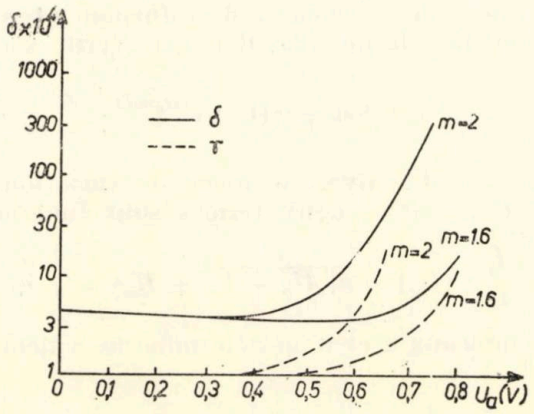


Fig. 2

3. La capacité de diffusion de la jonction PN réelle

La relation (1), comparée à l'équation idéale de la jonction PN :

$$I = I_s \, (e^{qU_a/kT} - 1), \tag{22}$$

dans l'hypothèse des tensions U_a relativement élevées (le domaine de mise en évidence de la capacité de diffusion), permet à écrire l'égalité approximative :

$$\frac{C_d}{C_{d0}} \cong \frac{I}{I_s} . \tag{23}$$

Si, maintenant, on prend en considération pour l'équation du courant, la relation (4), dans laquelle on tient compte de la dépendance du courant du phénomène de génération de porteurs dans la région de passage, il résulte :

$$\frac{C_d}{C_{d0}} = e^{qU_a/kT} - 1 + \frac{I_g}{I_s} (e^{qU_a/mkT} - 1) , \tag{24}$$

ou, pour des tensions appliquée U_a suffisamment élevées (de l'ordre des centaines de mV) et en même temps suffisamment basses ($U_a \leqslant 0{,}55$ V pour des diodes ayant $m = 1{,}6$),

$$C_d = C_{d0} \frac{I_g}{I_s} e^{qU_a/mkT}. \tag{25}$$

La relation (25) remplace la relation (2) pour définir la valeur de la capacité de diffusion aux jonctions PN réelles dans le même domaine de valabilité que la relation (15).

Lorsque la valeur de la capacité de diffusion intéresse dans le domaine de transition, la relation (25) doit être écrite sous la forme :

$$C_d = C_{d0} \frac{I_g}{I_s} \gamma(U_a)\, e^{qU_a/mkT}. \tag{26}$$

Il est intéressant d'analyser le mode de variation de la fonction $\delta(U_a) = (I_g/I_s)\,\gamma(U_a)$, où les deux termes sont fonction de U_a :

$$\delta(U_a) = \frac{I_g}{I_s}\gamma(U_a) = a\sqrt{U_0 - U_a} + B_m^{U_a} = \frac{I_g}{I_s} + B_m^{U_a}. \tag{27}$$

À l'aide des tableaux 2 et 6 on détermine les valeurs inscrites dans le tableau 7.

Tableau 7

U_a [V]	0	0,1	0,25	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
$\frac{I_g}{I_s} \times 10^4$	4,57	4,3	3,88	3,05	2,67	2,4	2,15	1,87	1,52
$B_{1,6}^{U_a} \times 10^4$	0,000	0,000	0,004	0,178	0,795	1,66	3,55	7,42	15,9
$B_2^{U_a} \times 10^4$	0,000	0,000	0,015	2,185	15,9	44,7	117,5	316,0	—
$\delta_{1,6} \times 10^4$	4,57	4,3	3,884	2,228	3,465	4,06	5,7	9,29	17,42
$\delta_2 \times 10^4$	4,57	4,3	3,895	5,235	5,235	18,57	47,1	119,65	—

La fonction $\delta(U_a)$ est représentée graphiquement dans la fig. 2.

On constate que, pour des domaines réduites de variation de la tension U_a (100...150 mV) et dont la limite supérieure est $\leqslant$ 0,65 V, pour $m = 1{,}6...1{,}7$, on peut considérer, avec une approximation admissible ($\leqslant \pm 15\%$), une valeur moyenne de la fonction $\delta(U_a)$, notée par δ_{med}.

Dans ces conditions la relation (26) devient

(28) $$C_d = C_{d0}\,\delta_{med}\,e^{qU_a/mkT}$$

ou

(29) $$C_d = C_{di}\,e^{qU_a/mkT}.$$

On va dénommer la valeur C_{di}, *capacité de diffusion initiale moyenne*. En considérant δ_{med} la valeur correspondante à $U_a = 0{,}6$ V pour $m = 1{,}6$ et la valeur C_{d0} celle calculée antérieurement, on obtient $C_{di} = 3{,}7.10^{-15}$ F, valeur très proche des résultats des mesures donnés dans le tableau 1.

Pour vérifier l'allure de la fonction exponentielle et déterminer le coefficient m et la valeur C_{di} on a représenté dans la fig. 3 le résultat des mesures effectuées sur trois diodes à silicium du type DZ 308. Les données les plus significatives sont données dans les tableaux 8...10.

Tableau 8

Diode 1B

U_a [mV]	−500	0	100	300	534	555	607	625	640
I [nA]	−0,04	0	0,3	30	2.10^4	$4{,}2.10^4$	$22{,}5.10^4$	$31{,}5.10^4$	40.10^4
C mesuré [nF]	0,650	0,820	0,870	1	4,25	6,55	21,4	32,5	42,7
C_b calculé [nF]	0,656	0,820	0,870	1,01	1,31	1,37	1,49	1,54	1,59
$C_d = C - C_b$ [nF]					2,94	5,18	19,91	30,96	41,11
C_d calculé selon (30) [nF]					3,02	5,0	20,6	30,2	45,5
Erreur %	+0,93	−	0	+1	+2,65	−3,6	+5,3	−2,5	+9,65

Quant à la capacité de diffusion agissant simultanément avec la capacité de barrière (C_b), il n'est pas question d'une mesure directe de sa valeur que pour des tensions U_a relativement très hautes pour lesquelles $C_d \gg C_b$. Pour cette raison on a effectué la mesure de la capacité totale présentée par la diode pour différentes tensions appliquées, en soustrayant ensuite la valeur C_b :

(30) $$C_d = C_{mesuré} - C_b.$$

Tableau 9

Diode 2B

U_a [mV]	−500	0	100	300	535	568	594	620	654
I [nA]	−0,3	0	—	4,5	$1,2.10^4$	$4,5.10^4$	9.10^4	$31,5.10^4$	35.10^4
C mesuré [nF]	0,350	0,440	0,470	0,540	2,4	6,3	9,2	20	42
C_b calculé [nF]	0,351	0,440	0,468	0,543	0,706	0,745	0,780	0,823	0,880
$C_d = C - C_b$ [nF]					1,694	5,555	8,42	19,17	41,12
C_d calculé selon (30) [nF]					2,31	5,42	9,65	19,2	43
Erreur %	+0,29	—	−0,43	+0,55	−27	−2,5	+12,76	+1,55	+4,95

Tableau 10

Diode 3B

U_a [mV]	−500	0	100	509	534	555	598	639	667
I [nA]	-0,4	0	2	$6,75.10^3$	$1,125.10^4$	$1,975.10^4$	$4,1.10^4$	22.10^4	40.10^4
C mesuré [nF]	0,440	0,567	0,600	1,8	2,5	4,2	6,8	20,5	48
C_b calculé [nF]	0,450	0,567	0,604	0,896	0,930	0,964	1,04	1,14	1,22
$C_d = C - C_b$ [nF]				0,904	1,57	3,236	5,76	19,36	46,78
C_d calculé selon [30] [nF]				0,986	1,83	2,98	6,67	23,1	44,0
Erreur %				+8,3	+13,5	+8,6	+13,6	+3,2	+6,3

Ces résultats sont ensuite comparées à une courbe du type (29), dont les coefficients numériques, déterminés par des essais expérimentaux, sont indiqués dans le tableau 1. Dans les tableaux 8...10 sont don-

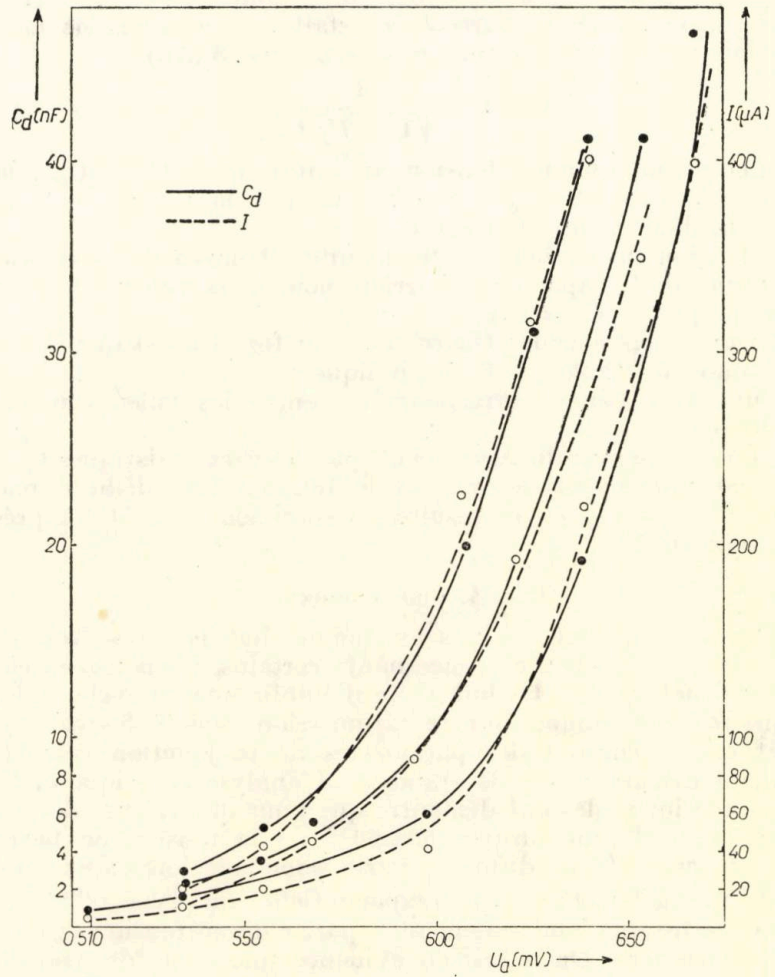


Fig. 3

nées aussi les erreurs de détermination de la capacité de diffusion lorsqu'on emploie la relation (29), comparées aux valeurs obtenues par voie expérimentale. (On indique en même temps les erreurs de détermination analytique, de la capacité de barrière). Les erreurs qui en résultent sont

les conséquences tant des approximations théoriques des nonconcordances entre les grandeurs numériques employées et le produit de série mesuré, que des erreurs de mesure (expérimentales).

En ce qui concerne la capacité C_b, on l'a déterminé par une voie mixte, expérimentale et analytique, étant donné qu'on sait [7] que la valeur de la capacité de barrière satisfait très exactement la relation connue (fait vérifié par les auteurs — tableaux 8...10)

$$C_b = C_{b0}\frac{1}{\sqrt{1 - U_a/U_0}} . \tag{31}$$

Compte tenu qu'à une tension appliquée nulle $C_{di} \leqslant C_{b0}$, la détermination de la capacité C_{b0} a été effectuée par la mesure de la capacité totale de la diode à une tension $U_a = 0$.

La tension de barrière a été déduite elle-aussi de la relation (31) par la mesure de la capacité de barrière pour deux valeurs de la tension U_a (pour lesquelles $C_d \ll C_b$).

L'examen des courbes tracées dans la fig. 3 aussi que des valeurs inscrites dans les tableaux 8...10 indique :

a) une très bonne correspondance entre les valeurs mesurées et celles calculées ;

b) une allure pratiquement identique des caractéristiques $C_d = f(U_a)$, obtenue par voie expérimentale, et la relation (29) déduite par nous, pour des valeurs C_{di} et m résultées expérimentalement et présentées dans le tableau 1.

4. Conclusions

Le présent travail n'a pas eu comme but la présentation d'une étude théorique rigoureuse concernant certains phénomènes électroniques de la jonction PN. La but a été d'établir une nouvelle interprétation d'une relation connue, interprétation selon laquelle les valeurs analytiques et expérimentales des paramètres de la jonction coïncident au moins quant à leurs ordres de grandeur. L'analyse théorique et les verifications expérimentales ont démontré que pour des valeurs de la tension appliquée qui s'élèvent jusqu'à 50...60% de la tension de barrière, la valeur de la capacité de diffusion varie selon une lois exponentielle du type $e^{qU_a/mkT}$. La lois théorique (exponentielle) du type $e^{qU_a/kT}$ est respectée par cette grandeur seulement à partir d'une tension egale à 70% de celle de barrière. On a mis en évidence une zone de transition où l'influence des deux fonctions exponentielles est comparable et pour laquelle on a établi quelques relations simplifiées pour la mise en évidence qualitative des phénomènes et l'appréciation quantitative, par une approximation suffisante, des valeurs qui y interviennent.

Reçue le 13 janvier 1973

IPA, Bucarest
et
Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique et d'Électronique

BIBLIOGRAPHIE

1. Drăgănescu M., *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit.* Ed. Acad., Buc., 1962.
2. * * * *Circuite cu tranzistoare.* Ed. Tehn., Buc., 1961.
3. Gray P. E., DeWitt D., Boothroyd A. R., Gibbons J. F., *Physica Electronics and Circuit Models of Transistors.* Vol. II, John Wiley & Sons, New York – London, 1964.
4. Абдулаев К. В., Якендер-Заде З. А., *Некоторое вопросы физики электронно-дырочных переходов.* Изд. ЕЛМ, Баку, 1971.
5. Paul R., *Transistoren. Physikalische Grundlagen und Eigenschaften.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1969.
6. Берман Л. С., *Введение в физику вариканов.* Изд., „Наука", Ленинград, 1968.
7. Roisman W., *Modulator cu rezistență de intrare foarte mare, realizat cu diode stabilizatoare, utilizate ca diode varicap.* Automatica și Electronica, **11**, *2* (1967).
8. Stere R., *Modulatoare și demodulatoare de măsurare cu dispozitive semiconductoare.* Thèse de doctorat, Inst. Polyt. „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest, 1972.
9. Bajon J., *L'amplification paramétrique en électrométrie.* L'Onde Electrique, **49**, *3*, 535–543 (1969).
10. Bajon J., *Caractéristiques d'un dispositif électrométrique a varactor.* Electronics Letters, **4**, *8*, 161–163 (1968).
11. Sah C. T., Noyce R. N., Shokley W., *Carrier Generation and Recombination in PN Junction Characteristics.* Proc. IRE, **45**, 1228 (1957).
12. Jonscher A. K., *Principles of Semiconductor Device Operation.* G. Bell and Sons Ltd., London, 1960.
13. Phillips A.B., *Transistor Engineering.* Mc Graw-Hill, New York, 1962.
14. Grove A. S., *Physics and Technology of Semiconductor Devices.* John Wiley, New-York, 1967.
15. Herșcovici H., *Contribuții la studiul, realizarea și aplicațiile tehnice ale unor electrometre.* Thèse, Inst. Polyt. Jassy, 1973.

O NOUĂ METODĂ DE INTERPRETARE A UNOR FENOMENE ELECTRONICE DIN JONCȚIUNEA SEMICONDUCTOARE ABRUPTĂ PN

(Rezumat)

Se analizează fenomenele electronice ce se raportează la capacitatea de difuzie a joncțiunii abrupte a diodelor stabilizatoare de tipul DZ 300, demonstrîndu-se atît analitic cît și experimental, o neconcordanță sensibilă între relația utilizată în literatura de specialitate pentru capacitatea de difuzie și realitate.

Analizîndu-se fenomenele de generare–recombinare din zonele de trecere ale joncțiunii PN, se deduce, pentru ecuația curent–tensiune a diodelor, o relație mult mai apropiată de rezultatele experimentale, pe baza căreia se stabilește pentru capacitatea de difuzie o relație corijată, ce se verifică prin măsurări experimentale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.317.784; 317.785.016.45

WATTMETRU—VARMETRU CU DIODE SEMICONDUCTOARE PENTRU MĂSURAREA PUTERILOR MICI*)

DE

D. BĂRBULESCU și NONEL THIRER

1. Introducere

În domeniul puterilor mici (sub 1 watt, respectiv 1 var) aparatele clasice, de tip electro- sau ferodinamic, devin practic inutlizabile, datorită lipsei de sensibilitate. Pentru măsurarea unor puteri active de ordinul 0,01...100 watt, în [1]...[3] sînt prezentate unele scheme care permit realizarea de wattmetre cu redresoare. În raport cu alte tipuri aceste wattmetre prezintă avantaje, certe printre care: sensibilitate crescută, domeniu larg de frecvențe, simplitate constructivă, dar și un mare neajuns, acela al unei precizii reduse. Posibilitatea de realizare a unor varmetre cu redresoare pentru măsurarea puterilor reactive de valori reduse nu a fost întîlnită în literatură.

Deoarece dispozitivul de măsurat al wattmetrelor poate fi utilizat la realizarea de varmetre, prin defazarea cu 90° în raport cu tensiunea a curentului din circuitul de tensiune, pornind de la schema unui wattmetru cu redresoare, în lucrare se indică mai întîi modul de transformare a acesteia în scopul funcționării aceluiași aparat ca varmetru. Sînt prezentate apoi datele constructive ale unui aparat (wattmetru—varmetru) care permite măsurarea ambelor componente (activă și reactivă) ale puterii aparente, precum și unele verificări experimentale ale acestuia.

2. Principiul de funcționare

Schema de principiu și modul de conectare a aparatului în circuit sînt indicate în fig. 1, în care s-a notat cu: IME—instrument indicator de tip magnetoelectric, de rezistență interioară $r_1 = r_2$; D_1, D_2 — diode

*) Prezentată la sesiunea științifică jubiliară „60 ani de învățămînt electrotehnic în Iași", 21-23 decembrie 1972.

semiconductoare cu caracteristici pătratice identice ; r_s — șunt ; R — rezistență adițională ; C — capacitate adițională ; k — comutator pentru stabilirea regimului de funcționare (P — wattmetru, Q — varmetru).

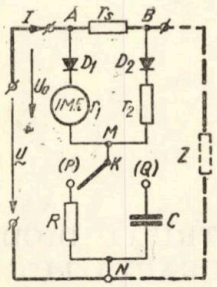


Fig. 1

Independent de poziția comutatorului, ecuația de funcționare a aparatului (cu simplă redresare) este [4] :

$$\alpha = \frac{1}{2} S_I I_{\text{med}} , \tag{1}$$

în care : α — deviația *IME*, S_I — sensibilitatea la curent a *IME*, I_{med} — valoarea medie a curentului prin *IME*.

a) *Funcționarea aparatului ca wattmetru* este prezentată în [1]. În cazul schemei din fig. 1 (cu k în poziția P), valoarea medie a curentului rezultă proporțională cu puterea activă, conform relației :

$$I_{\text{med}} = \frac{2bI_U I_I \cos\varphi}{r_0 + r_1} = \frac{br_s}{2(r_0 + r_1)^2 R} UI \cos\varphi = \tag{2}$$

$$= \frac{br_s}{2(r_0 + r_1)^2 R} P = S_P P,$$

în care s-au notat cu : I_U , I_I — valorile efective ale componentelor curenților prin diode determinate de tensiunea U, respectiv de curentul de sarcină I ; φ — unghiul de defazaj dintre curenții I_U , I_I ; b — panta caracteristicii $r(I)$ a diodelor (în vecinătatea originii) ; r_0 — rezistența diodelor pentru $I = 0$; P — puterea activă ; S_P — sensibilitatea la putere activă a schemei, care, în baza relației (2), rezultă :

$$S_P = \frac{P}{I_{\text{med}}} = \frac{br_s}{2(r_0 + r_1)^2 R} , \quad \left[\frac{\text{Watt}}{\text{A}}\right]. \tag{3}$$

Introducînd (2) în (1), ecuația de funcționare a aparatului se poate exprima prin relația :

(4) $$\alpha = S_w P,$$

în care S_w reprezintă sensibilitatea la putere activă a aparatului, aceasta, la rîndul ei, fiind exprimată prin relația :

(5) $$S_w = \frac{1}{2} S_I S_P = \frac{S_I}{4} \cdot \frac{b}{(r_p + r_1)^2} \cdot \frac{r_s}{R}, \quad \left[\frac{\text{div}}{\text{W}}\right].$$

Se observă din (5) că sensibilitatea aparatului, în schema de wattmetru, depinde atît de sensibilitatea la curent (S_I) a instrumentului indicator cît și de sensibilitatea la putere activă (S_P) a schemei.

b) *Funcționarea aparatului ca varmetru* (k în poziția Q) se bazează pe defazarea în avans, cu un unghi de 90°, a curentului $\underline{I}_U$ în raport cu tensiunea $\underline{U}$ care îl produce. În acest scop se înlocuiește rezistența adițională cu un condensator a cărui capacitate se alege astfel, încît, la frecvența nominală, să nu se modifice impedanța circuitului de tensiune.

În cazul funcționării ca varmetru, rezistența de sens invers a diodelor (R_{inv}) nu poate avea valori oricît de mari, deoarece, după încărcarea condensatorului în timpul cît diodele sînt polarizate direct, ea trebuie să permită descărcarea lui în timpul cît diodele sînt polarizate invers. În acest scop constanta de timp a circuitului de tensiune, în semiperioada în care diodele sînt polarizate invers, trebuie să fie mai mică decît un sfert de perioadă. Notînd $\tau_{inv} = C R_{inv}$ — constanta de timp a circuitului de tensiune cu diodele polarizate invers, condiția restrictivă se exprimă sub forma :

(6) $$\tau_{inv} < \frac{T}{4}.$$

Deoarece reactanța capacitivă adițională $X_C = 1/\omega C$ este mare în comparație cu rezistența R_{inv}, această condiție este în general îndeplinită, dar ea trebuie verificată.

După înlocuirea rezistenței adiționale R cu condensatorul de capacitate C, dacă se neglijează, într-o primă aproximație, rezistența circuitului de tensiune în raport cu reactanța lui, curentul mediu (2) care parcurge *IME* devine :

(7) $$I_{med} = \frac{2bI_U I_I \cos \psi}{r_0 + r_1},$$

în care :

(8) $$\psi = \arg \underline{I}_U - \arg \underline{I}_I = 90° - \varphi,$$

astfel încît (7) se poate exprima similar cu (2), sub forma :

(9) $$I_{med} = \frac{br_s}{2(r_0 + r_1)^2 X_C} UI \sin \varphi = \frac{br_s}{2(r_0 + r_1)^2 X_C} Q = S_Q Q,$$

unde S_Q reprezintă sensibilitatea la putere reactivă a schemei, care, conform cu (9), se determină cu relația :

$$S_Q = \frac{Q}{I_{\text{med}}} = \frac{br_s}{2\,(r_0 + r_1)^2\,X_C}. \tag{10}$$

Introducînd (9) în (1) se obține ecuația de funcționare a varmetrului :

$$\alpha = S_{\text{var}}\,Q, \tag{11}$$

în care S_{var} reprezintă sensibilitatea la putere reactivă a aparatului, aceasta, la rîndul ei, fiind exprimată prin relația :

$$S_{\text{var}} = \frac{1}{2}\,S_I\,S_Q = \frac{S_I}{4} \cdot \frac{b}{(r_0 + r_1)^2} \cdot \frac{r_s}{X_C}, \quad \left[\frac{\text{div}}{\text{var}}\right]. \tag{12}$$

3. Erori ale aparatului în funcționarea ca varmetru

La stabilirea relațiilor precedente s-a presupus, într-o primă aproximație, că rezistența circuitului de tensiune este neglijabilă și că unghiul de defazaj al curentului din acest circuit, în raport cu tensiunea, este de 90°. În realitate, datorită prezenței rezistențelor, unghiul de defazaj se abate cu un unghi δ față de 90° (fig. 2), iar impedanța circuitului de tensiune rezultă $Z_V = X_C/\cos\delta$.

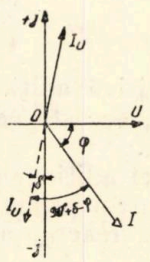


Fig. 2

Relația care exprimă corect (fără eroare) deviația aparatului este (la frecvența nominală) :

$$\alpha' = \frac{S_I}{4} \cdot \frac{b}{(r_0 + r_1)^2} \cdot \frac{r_s}{X_C} \cos\delta\; UI \sin(\varphi - \delta). \tag{13}$$

Ca urmare, deviația exprimată de relația (11) este afectată de o eroare sistematică :

(14) $$\varepsilon = \left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| = 100\,\frac{\delta}{\operatorname{tg}\varphi}\,,\ [\%],$$

unde

(15) $$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{r_0}{2X_C}\,.$$

Se deduce că erorile sistematice scad în cazul cînd măsurările se efectuează în circuite puternic reactive (valori mari ale unghiului de defazaj φ).

4. Calculul elementelor schemei

După caracteristicile diodelor se poate cunoaște căderea de tensiune U_0 care limitează porțiunea cu dependență pătratică $U(I)$. Admițînd că tensiunea aplicată U și curentul de sarcină I produc în cele două ramuri cu diode, în mod separat, căderile de tensiune U_{0U} și respectiv U_{0I}, acestea se aleg astfel încît suma lor să nu depășească tensiunea limită U_0. Pe de altă parte, trasînd dreapta $r(I) = r_0 - bI$, corespunzătoare caracteristicii $U(I)$ în porțiunea pătratică, se pot determina panta b și ordonata în origine r_0 (rezistența diodelor pentru $I = 0$). Impunînd valorile nominale U_n, I_n ale tensiunii și curentului și cunoscînd parametrii menționați mai sus, se calculează rezistența șuntului r_s, rezistența adițională R (wattmetru) și capacitatea adițională C (varmetru) cu relațiile :

(16) $$r_s = \frac{2\,(r_0 + r_1)}{r_0}\cdot\frac{U_{0I}}{I}\,;\quad R = \frac{r_0}{2}\cdot\frac{U}{U_{0U}}\,;\quad C = \frac{1}{\omega R}\,.$$

5. Rezultate experimentale

Pentru realizarea aparatului s-au folosit două diode cu cuproxid avînd caracteristicile $U(I)$ practic identice și pătratice în jurul originii (tabelul 1).

Tabelul 1

U [mV]	10	25	40	50	60
$I_1 = I_2$ [μA]	0,195	0,55	1	1,75	2,5
$r_1 = r_2$ [kΩ]	51,2	46,5	40	28,6	24

Verificarea caracterului pătratic al caracteristicii $U(I)$ s-a efectuat prin controlul liniarității caracteristicii $r(I)$, indicată în fig. 3, obținîndu-se o dependență liniară pentru $I < 1{,}75$ μA.

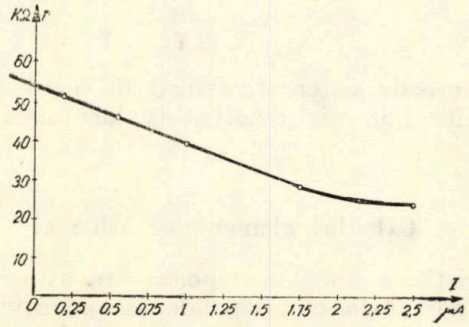


Fig. 3

Datorită curenților foarte mici prin diode, drept instrument indicator s-a folosit un galvanometru de curent continuu ($r_i = 81\,\Omega$) șuntat de o rezistență de 1 100 Ω, care asigură amortizarea necesară.

Aparatul a fost construit pentru două domenii de măsurare : $P_{1n}(Q_{1n}) = 1$ W (var) și $P_{2n}(Q_{2n}) = 0{,}1$ W (var), corespunzător parametrilor nominali : $I_n = 0{,}1$ A, $U_{1n} = 10$ V și respectiv $U_{2n} = 1$ V, avînd aceeași constantă atît în funcționarea ca wattmetru cît și ca varmetru ($K_W = K_{var}$).

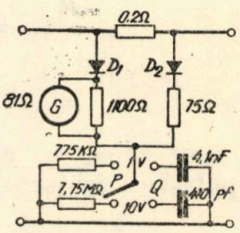


Fig. 4

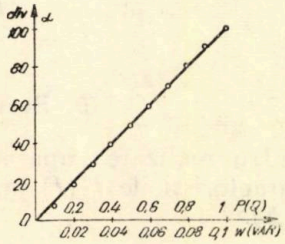


Fig. 5

Calculul elementelor de circuit ale schemei, reprezentată în fig. 4, s-a efectuat conform relațiilor (16), considerînd $r_0 = 54{,}5$ kΩ, (fig. 3), $U_{0I} = 10$ mV și $U_{0U} = 35$ mV, astfel încît curentul în sens direct prin diode să nu depășească 1,75 A. Valorile rezultate din calcul sînt indicate pe schemă. Constantele de timp ale circuitului de tensiune cu diodele polarizate invers sînt de ordinul $\tau_{1inv} = 10^{-5}$ sec, pentru $U_{1n} = 10$ V și $\tau_{2inv} = 10^{-4}$ sec pentru $U_{2n} = 1$ V, verificînd condiția (6).

Verificarea aparatului ca wattmetru s-a efectuat utilizînd drept sarcină o rezistență variabilă cunoscută și trasînd caracteristica $\alpha(P)$ pentru $U_{1n} = 10$ V și $U_{2n} = 1$ V (fig. 5). Valorile experimentale și cele rezultate din calcul sînt indicate în tabelul 2 (pentru $U_{1n} = 10$ V).

Tabelul 2

$P_n = 1$ W ; $U_n = 10$ V ; $K_W = 0{,}01$ W/div										
α [div]	8,5	19	29,5	40	50,5	60,5	70	79,5	90	100
$P_{indic.}$ [W]	0,085	0,19	0,295	0,4	0,505	0,605	0,7	0,795	0,9	1
$P_{calcul.}$ [W]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$Q_n = 1$ var ; $U_n = 10$V ; $K_{var} = 0{,}01$ var/div										
α [div]	8	19	29,5	40	50	60,5	70	80	90,5	100
$Q_{indic.}$ [var]	0,08	0,19	0,295	0,4	0,5	0,605	0,7	0,8	0,905	1
$Q_{calcul.}$ [var]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Pentru verificarea aparatului ca varmetru s-a utilizat mai întîi o sarcină pur reactivă constituită din condensatoare și s-a trasat caracteristica $\alpha(Q)$ pentru $U_n = 10$ V, obținînd o dreaptă care se suprapune peste dreapta $\alpha(P)$, reprezentată în fig. 5. Valorile experimentale și cele rezultate din calcul sînt indicate în tabelul 2. S-a efectuat apoi verificarea aparatului ca varmetru utilizînd o impedanță de sarcină constituită din rezistențe în paralel cu condensatoare ale căror valori au fost modificate astfel încît să se obțină unghiuri de defazaj variind din 15° în 15°, în intervalul 0°...90° (tabelul 3).

Tabelul 3

φ [grade]	0	15	30	45	60	75	90
R [Ω]	100	103,5	115,8	141,4	200	387	—
C [μF]	—	8,24	15,9	22,5	27,5	30,7	31,8
α [div]	2	24,5	51,5	72,5	88,5	97,5	100
$Q_{indic.}$ [var]	0,02	0,245	0,515	0,725	0,885	0,975	1
$Q_{calcul.}$ [var]	0	0,259	0,5	0,707	0,865	0,966	1

În funcționarea ca varmetru erorile de unghi (ε) pot atinge valori apreciabile pe scara corespunzătoare tensiunii nominale mici (1 V) și în cazul unor unghiuri de defazaj reduse (tabelul 4).

Tabelul 4

φ [grade]		15	30	45	60	75	90
$U_{1n} = 10$ V	ε_1 [%]	2,61	1,21	0,7	0,4	0,26	0
$U_{2n} = 1$ V	ε_2 [%]	26,1	12,1	7	4,05	2,61	0

Erorile de unghi pot fi micșorate substanțial, chiar la tensiuni nominale mici, dacă se utilizează diode cu rezistența în origine (r_0) de valoare mai mică (15).

6. Concluzii

a) Se demonstrează posibilitatea realizării unui varmetru cu redresoare. Pe această bază se realizează un wattmetru—varmetru, aparat care permite măsurarea ambelor componente ale puterii aparente, cu aceeași constantă, fapt care se confirmă experimental.

b) Eroarea de unghi care apare în funcționarea ca varmetru depinde, pe de o parte, de raportul între rezistența în origine a diodelor și reactanța circuitului de tensiune, iar pe de alta, de caracterul sarcinii (φ). Indicațiile aparatului depind de frecvență numai în cazul funcționării ca varmetru.

c) Folosind procedeul indicat se pot realiza wattmetre—varmetre pentru măsurarea puterilor mici, în domeniul în care alte tipuri de aparate nu au o sensibilitate satisfăcătoare. Pentru micșorarea erorilor este recomandabilă alegerea unor diode identice a căror rezistență în origine este mai mică.

Primită la 16 februarie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică
și măsurări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Карандеев Я. și colab., Электричетво, 44—47 (1953).
2. Левин М. И. și colab., *Основы электроизмерителной техники*, Изд. «Энергия», М., 1967, 164.
3. Кушнир Ф. В. și colab., *Измереня в технике связи*. Изд. «Связь», М., 1970, 259.
4. Manolescu P., *Măsurări electrice*. Vol. I, Ed. Tehn., Buc., 1966, 157.

WATTMÈTRE–VARMÈTRE À DIODES SÉMICONDUCTRICES, POUR LA MESURE DES PETITES PUISSANCES

(Résumé)

On prouve la possibilité de réaliser des varmètres avec des redresseurs et on indique la modalité dont on peut construire un wattmètre–varmètre destiné à la mesure des petites puissances, actives et réactives, avec la même constante. On détermine les erreurs d'angle de l'appareil fonctionnant comme varmètre et on indique la modalité dont on peut les diminuer.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.317.382

POSIBILITĂŢI DE MĂSURARE A PUTERII DE NESIMETRIE ÎN CENTRALELE ŞI STAŢIILE ELECTRICE CU AJUTORUL UNOR ECHIPAJE CE FOLOSESC NEUTRUL ARTIFICIAL *)

DE

LAURIAN PREDA şi EUGENIU VOINEA

1. Introducere

În regim nesimetric de funcţionare generatoarele electrice nu pot fi încărcate a parametrii nominali datorită pierderilor suplimentare ce apar în rotor, în piesele polare (la alternatoarele cu poli înecaţi) şi în înfăşurarea de excitaţie, precum şi datorită zgomotelor şi vibraţiilor (la hidrogeneratoarele fără înfăşurări de amortizare) [1]. De asemenea şi încărcarea nesimetrică a transformatoarelor este limitată, funcţie de grupa de conexiuni [2]. Apare deci necesitatea măsurării puterii de nesimetrie în diverse puncte ale instalaţiilor electrice pentru a putea lua măsuri de simetrizare a sarcinii.

În această lucrare se analizează posibilităţile de măsurare a puterii de nesimetrie, în circuitele trifazate, fără nul, ale centralelor şi staţiilor electrice, prin utilizarea unor wattmetre monofazate ce folosesc neutrul artificial.

Puterea maximă ce poate fi transmisă la un consumator trifazat, la pierderi pe linie date, se calculează cu relaţia [3], [4] :

$$P^2_{max} = P^2 + Q^2 + P^2_{nes}, \tag{1}$$

unde : P — puterea activă, Q — puterea reactivă, P_{nes} — puterea de nesimetrie.

Indicaţiile unui wattmetru monofazat, montat cu neutru artificial, la modificarea nesimetriei, sînt date de o relaţie de forma :

$$(a, b,...,i) = k'_1P + k'_2Q + k'_3p_1 + k'_4q_1 + k'_5p_2 + k'_6q_2, \tag{2}$$

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, 28—30 septembrie 1967.

unde a, b,..., i sînt expresiile analitice ale indicației aparatului de măsură montat în cele nouă moduri posibile, conform tabelului 1, $p_1 = 3U_1 I'' \times \cos \varphi_1''$, $p_2 = 3U_1 I'' \cos \varphi_2''$, $q_1 = 3U_1 I'' \sin \varphi_1''$, $q_2 = 3U_1 I'' \sin \varphi_2''$, I'' — componenta inversă a curentului, φ_1'' și φ_2'' — defazajele între componentele inverse ale curentului și tensiune, considerate aceleași în cazul permutărilor circulare ale valorilor curenților în raport cu fazele [5].

Tabelul 1

	I_R	I_S	I_T
U_R	a	b	c
U_S	d	e	f
U_T	g	h	i

2. Măsurarea puterii de nesimetrie cu ajutorul a trei sau patru echipaje ce utilizează neutru artificial

Considerînd trei valori constante, dar diferite, pentru curenții de pe cele trei faze, pot exista următoarele șase cazuri:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{A. } I_R > I_S > I_T, & \text{D. } I_R > I_T > I_S, \\ \text{B. } I_S > I_T > I_R, & \text{E. } I_S > I_R > I_T, \\ \text{C. } I_T > I_R > I_S, & \text{F. } I_T > I_S > I_R. \end{cases}$$

Un wattmetru monofazat, cu neutru artificial, poate fi însă montat, într-o rețea cu trei conductoare, în 9 moduri distincte (tabelul 1). Rezultă 54 expresii analitice ale indicației instrumentului de măsură, care diferă prin valorile coeficienților k_1', k_2',..., k_6' [7], (tabelul 2). Analizînd aceste expresii analitice, cu scopul punerii în evidență a montajelor cu două echipaje din care se elimină P și Q, rămînînd doar puterile active și reactive de nesimetrie, se constată că există nouă cazuri posibile; se pot separa trei grupe de montaje, α, β și γ, la care în toate cele șase cazuri (3) indicația aparatului de măsură rămîne aceeași. Ele sînt următoarele (fig. 1):

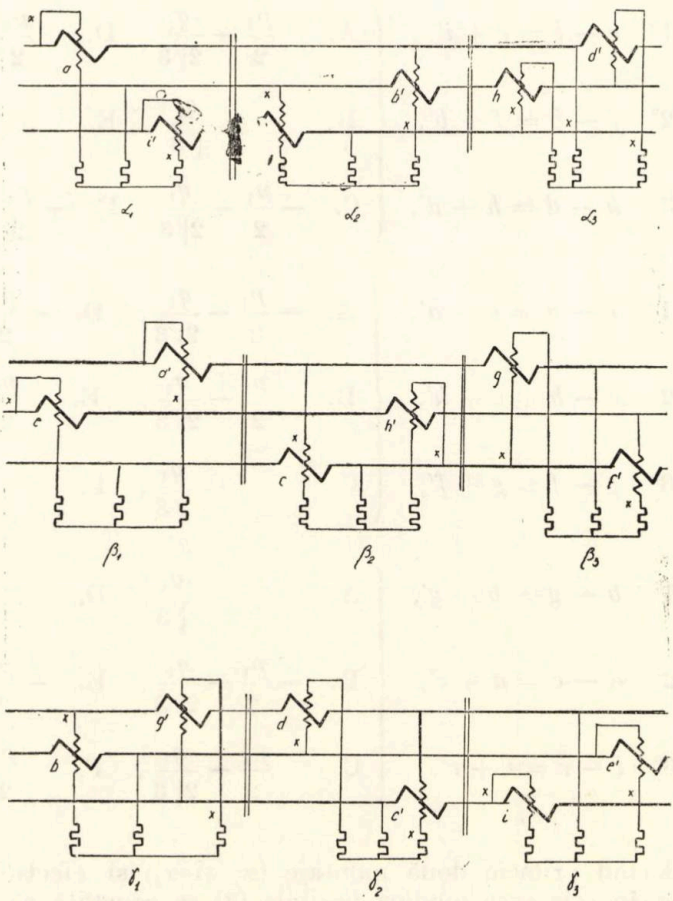


Fig. 1

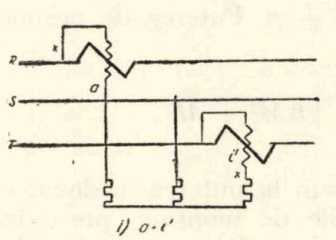


Fig. 2

$$(\alpha)\begin{cases} 1^\circ\ e-i=e+i', \\ 2^\circ\ f-b=f+b', \\ 3^\circ\ h-d=h+d', \end{cases}\quad \begin{cases} \text{A. } \dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{D. } \dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ \text{B. } \dfrac{q_1}{\sqrt{3}} & \text{E. } \dfrac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ \text{C. } -\dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{F. } -\dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}; \end{cases}$$

$$(4)\quad (\beta)\begin{cases} 1^\circ\ e-a=e+a', \\ 2^\circ\ c-h=c+h', \\ 3^\circ\ g-f=g+f', \end{cases}\quad \begin{cases} \text{A. } -\dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{D. } -\dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ \text{B. } \dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{E. } \dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ \text{C. } \dfrac{q_1}{\sqrt{3}} & \text{F. } \dfrac{q_2}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

$$(\gamma)\begin{cases} 1^\circ\ b-g=b+g', \\ 2^\circ\ d-c=d+c', \\ 3^\circ\ i-e=i+e', \end{cases}\quad \begin{cases} \text{A. } \dfrac{q_1}{\sqrt{3}} & \text{D. } \dfrac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ \text{B. } -\dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{E. } -\dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ \text{C. } \dfrac{p_1}{2}-\dfrac{q_1}{2\sqrt{3}} & \text{F. } \dfrac{p_2}{2}-\dfrac{q_2}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Considerînd primele două montaje (α_1 și α_2) și efectuînd permutarea fazelor în cele șase moduri posibile (3) se constată că acestea se reduc la două montaje independente (I și II, fig. 2).

Pentru măsurarea puterii de nesimetrie trebuie utilizate două montaje din grupe diferite (α, β, γ). Notînd cu M_1 suma indicațiilor celor două aparate și cu M_2 diferența lor, se efectuează, pentru cele șase cazuri (3) operațiile : $\alpha \pm \beta$, $\alpha \pm \gamma$, $\beta \pm \gamma$. Puterea de nesimetrie se determină atunci cu relația [4] :

$$(5)\qquad P_{\text{nes}} = 3U_1 I^{IV} = \sqrt{3M_1^2 + M_2^2}\,.$$

Deoarece în (5) M_1 și M_2 intervin la puterea a doua, este indiferent semnul lor. Rezultă că grupările de montaje preconizate permit inversarea capetelor bobinelor de tensiune fără ca rezultatul să se modifice.

Analizînd cele trei grupări de montaje ($\alpha \pm \beta$, $\alpha \pm \gamma$, $\beta \pm \gamma$) se constată că există 27 posibilităţi de măsurare a puterii de nesimetrie, la care se mai adaugă încă alte 27 corespunzătoare cazurilor cînd se inversează capetele bobinelor de tensiune ($\alpha' \pm \beta'$, $\alpha' \pm \gamma'$, $\beta' \pm \gamma'$), deci în total 54 cazuri posibile.

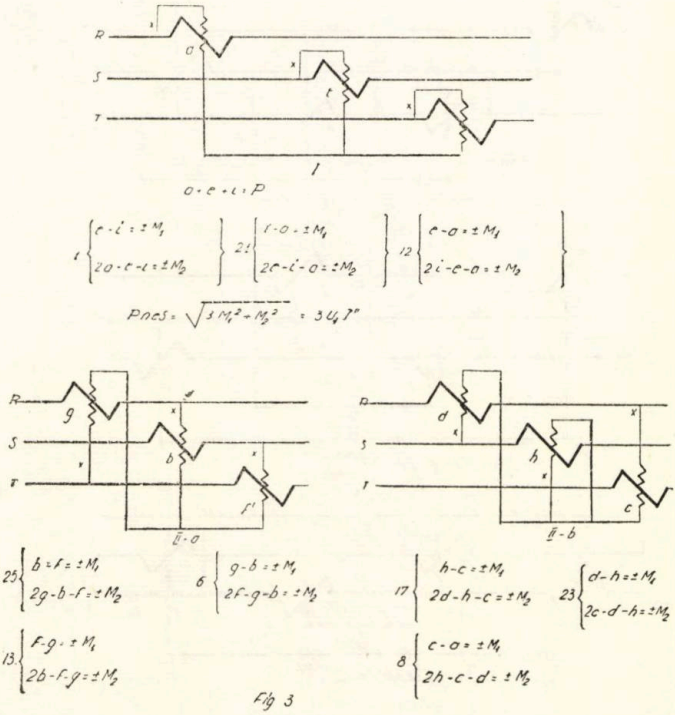


Fig. 3

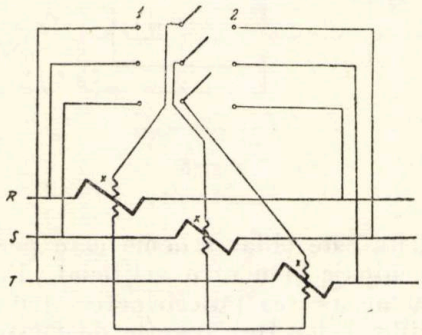


Fig. 4

Analiza arată că în 9 din aceste cazuri sînt suficiente doar trei echipaje. Considerînd aceste 9 montaje, în cazul schimbării succesiunii fazelor, se constată că trei dintre ele se reduc la o singură schemă independentă (fig. 3-I), care permite măsurarea puterii de nesimetrie ; se

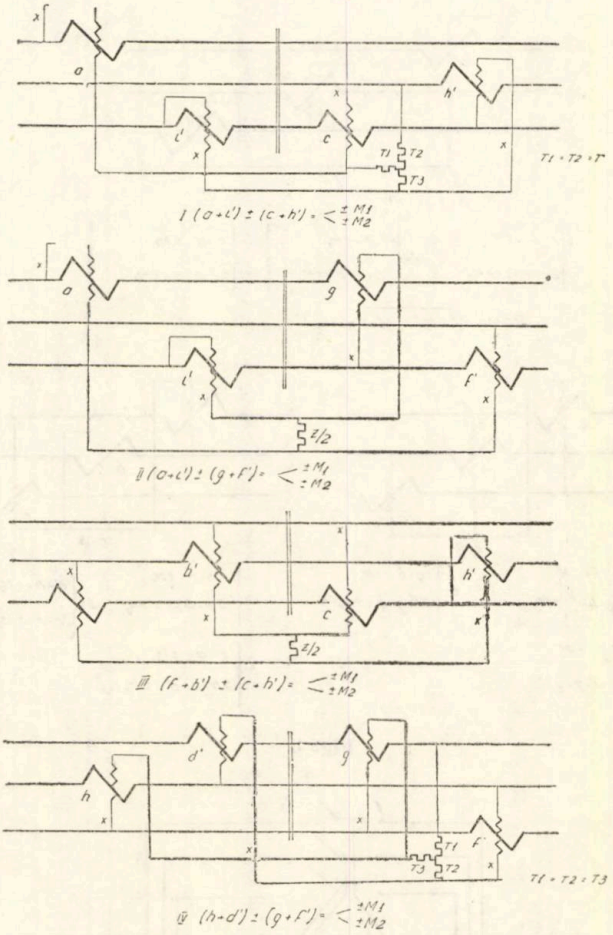


Fig. 5

mai constată că aceasta este chiar schema care permite măsurarea puterii active cu trei echipaje și neutru artificial. Deci cu ajutorul unei scheme clasice pentru măsurarea puterii active trifazate (care se obține prin sumarea indicațiilor celor trei aparate de măsură) se poate măsura și puterea de nesimetrie. În acest scop se consideră indicația unui aparat

oarecare, se dublează și din ea se scade suma celorlalte două indicații, obținînd M_2, iar prin efectuarea diferenței indicațiilor ultimelor două aparate se obține M_1 ; se calculează apoi puterea de nesimetrie (5).

Celelalte șase montaje se reduc (cînd se modifică succesiunea fazelor (3)) la două scheme independente care folosesc de asemenea trei echipaje (fig. 3-II *a* și *b*). Se mai constată că schema 3-II *a* devine 3-II *b* (și invers) dacă se inversează două faze, ceea ce se poate realiza ușor folosind un inversor de tensiune (fig. 4).

Analizînd expresiile analitice ale indicațiilor wattmetrelor monofazate [7] se observă că suma lor este $-P/2 - \sqrt{3}Q/2$ pentru schema din fig. 3-II *a* și $-P/2 + \sqrt{3}Q/2$ pentru cea din fig. 3-II *b*. Apare deci posibilitatea ca doar cu ajutorul a trei echipaje, folosind și un inversor de tensiune, să se poată măsura puterea activă, reactivă și de nesimetrie. Puterea activă rezultă ca suma celor două lecturi, iar cea reactivă ca diferența lor raportată la $\sqrt{3}$. Pentru calculul puterii de nesimetrie se procedează la fel ca și în cazul schemei 3-I.

Deci există două scheme independente (fig. 3-I și 3-II) care permit măsurarea puterii de nesimetrie cu trei echipaje, cu neutru artificial ; aceste scheme au și avantajul important că nu utilizează rezistoare pentru crearea neutrului artificial.

Analizînd în același mod și celelalte 18 scheme se mai pot găsi încă patru montaje independente (fig. 5) cu ajutorul cărora se poate măsura puterea de nesimetrie ; acestea prezintă însă dezavantajul, față de cele anterioare, că folosesc patru echipaje și necesită rezistoare pentru crearea neutrului artificial.

3. Concluzii

Măsurarea puterii de nesimetrie în instalațiile electrice cu trei conductoare și tensiuni simetrice, din centralele și stațiile electrice, poate fi efectuată cu ajutorul unor wattmetre monofazate care utilizează neutrul artificial.

Au fost imaginate două scheme cu trei echipaje și nul artificial care permit măsurarea puterii de nesimetrie. Schema reprezentată în fig. 3-I este cunoscută și utilizată pentru măsurarea puterii active ; schema din fig. 3-II, cu ajutorul unui inversor (fig. 4), permite și măsurarea puterilor active și reactive. Au mai fost determinate, de asemenea, patru scheme (fig. 5), care permit măsurarea puterii de nesimetrie cu ajutorul a patru echipaje.

Pentru creșterea puterii active care poate fi transmisă consumatorilor, la pierderi date pe linie, considerăm că este necesară introducerea tarifării energiei de nesimetrie.

Primită la 10 noiembrie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiu I. S., Fransua Al., *Tratat de mașini electrice*. Vol. IV, Ed. Tehn., Buc., 1972.
2. * * * STAS 1703—67.
3. Лурье Л. С., *Кажущаяся мощность в трехфазных системах*. Электричество, 2 (1956).
4. Fränkel D., *Măsurarea puterii de nesimetrie și a componentei inverse a curentului cu wattmetre*. Bul. șt. și tehn., Inst. polit. Timișoara, 5 (19), *1—2*, 139—142.
5. Preda L., *Analiza indicațiilor unui wattmetru (contor) monofazat montat într-o rețea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat, la modificarea nesimetriei rețelei*. Bul. Inst. polit., Iași, XII (XVI), *3—4*, 225—232 (1966).
6. Preda L., *Asupra măsurării puterii și energiei de nesimetrie*. Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *3—4*, 329—336 (1967).
7. Preda L., *Analiza indicațiilor unui wattmetru (contor) monofazat, montat cu neutru artificial într-o rețea trifazată, în regim dezechilibrat de curenți*. Bul. Inst. polit. Iași, s. III, XV (XIX), *3—4*, 25—33 (1969).
8. Preda L., *Posibilități de măsurare simultană, cu trei sau patru echipaje ce utilizează neutru artificial, a puterilor și energiilor active și reactive în rețelele trifazate în regim dezechilibrat de curenți*. Bul. Inst. polit. Iași, s. III, XVII (XXI), *3—4*, 85—90 (1971).

POSSIBILITÉS DE MESURE DE LA PUISSANCE DE DÉSÉQUILIBRE DANS LES CENTRALES ET STATIONS ÉLECTRIQUES À L'AIDE D'ÉQUIPAGES QUI UTILISENT LE NEUTRE ARTIFICIEL

(Résumé)

En étudiant les expressions analytiques des indications d'un wattmètre monophasé avec neutre artificiel, on détermine deux schémas avec trois équipages et neutre artificiel qui permettent à obtenir la puissance de déséquilibre ; on trouve, toutefois, encore quatre schémas qui utilisent quatre équipages.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.3.015.33 ; 621.314.22

ASUPRA TRANSMISIEI TENSIUNII DE IMPULS ÎN TRANSFORMATORUL CU DOUĂ INFĂȘURĂRI*)

DE

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH și MIRCEA GUȘĂ

1. Introducere

În [1] și [2] s-au studiat, pe baza unor scheme echivalente simplificate, fenomenele care au loc în transformatorul cu două înfășurări supus la tensiunea de impuls, fără a se urmări consecințele legate de transmisia tensiunii de impuls în a doua înfășurare.

În lucrarea de față, plecînd de la o schemă echivalentă mai completă, se studiază pe cale analitică transmisia tensiunii de impuls prin înfășurările transformatorului și se trag concluzii cu privire la solicitarea izolației înfășurării nesupuse la tensiunea de impuls în diferite condiții de tratare a bornelor acestor înfășurări.

2. Studiul repartiției tensiunii în înfășurări în regim de impuls

Se consideră schema echivalentă adoptată în [2] (fig. 1) în care : L_1 , L_2 — inductivitățile proprii ale înfășurărilor, M — inductivitatea mutuală între înfășurări, C_1 , C_2 — capacitățile față de pămînt ale înfășurărilor, C_{12} — capacitatea între înfășurări, K_1 , K_2 — capacitățile între elementele în serie ale înfășurărilor, toți parametrii fiind considerați pe unitatea de lungime axială a înfășurărilor. În plus se iau în considerare și inductivitățile proprii L_{01}, L_{02} și mutuală M_0, corespunzătoare fluxului comun prin miezul de oțel al transformatorului, de asemenea raportate la lungimea axială a înfășurărilor.

---

*) Prezentată în sesiunea științifică jubiliară „60 ani de învățămînt electrotehnic în Iași", din 21—23 decembrie 1972.

Conform schemei echivalente adoptate, pentru un element dx din lungimea axială l a înfășurărilor, rezultă următoarele ecuații :

$$(1) \qquad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{L_{01}}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l i_1 \, dx + \frac{M_0}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l i_2 \, dx,$$

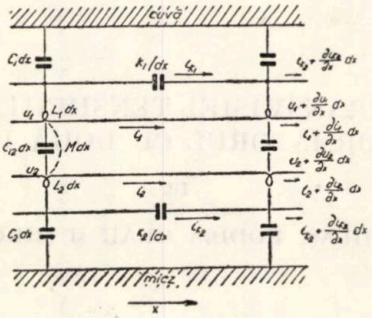


Fig. 1

$$(2) \qquad -\frac{\partial u_2}{\partial x} = L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{L_{02}}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l i_2 \, dx + \frac{M_0}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l i_1 \, dx,$$

$$(3) \qquad -\frac{\partial (i_1 + i_{k1})}{\partial x} = (C_1 + C_{12}) \frac{\partial u_1}{\partial t} - C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

$$(4) \qquad -\frac{\partial (i_2 + i_{k2})}{\partial x} = (C_2 + C_{12}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$(5) \qquad i_{k1} = -K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \, \partial t}, \qquad (6) \qquad i_{k2} = -K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \, \partial t},$$

sau sub formă operațională (transformarea W a g n e r - C a r s o n) :

$$(7) \qquad -\frac{dU_1}{dx} = L_1 p I_1 + L_2 p I_2 + \frac{L_{01}}{l} p \int_0^l I_1 \, dx + \frac{M_0}{l} p \int_0^l I_2 \, dx,$$

$$(8) \qquad -\frac{dU_2}{dx} = L_2 p I_2 + M p I_1 + \frac{L_{02}}{l} p \int_0^l I_2 \, dx + \frac{M_0}{l} p \int_0^l I_1 \, dx,$$

$$(9) \qquad -\frac{d(I_1+I_{k1})}{dx} = (C_1 + C_{12})\,pU_1 - C_{12}\,pU_2\,,$$

$$(10) \qquad -\frac{d(I_2+I_{k2})}{dx} = (C_2 + C_{12})\,pU_2 - C_{12}\,pU_1\,,$$

$$(11) \qquad I_{k1} = -K_1\,p\frac{dU_1}{dx^4}, \qquad (12) \qquad I_{k2} = -K_2\,p\frac{dU_2}{dx},$$

unde U_1, U_2, I_1, I_2, I_{k1}, I_{k2} reprezintă respectiv transformatele mărimilor u_1, u_2, i_1, i_2, i_{k1}, i_{k2}.

Din ecuațiile (7)...(12) rezultă, prin eliminări succesive, ecuația

$$(13) \qquad \frac{d^4U_1}{dx^4} - \frac{(LKp^2+S)\,p^2}{LK_1K_2p^4+Hp^2+1}\cdot\frac{d^2U_1}{dx^2} + \frac{LCp^4}{LK_1K_2p^4+Hp^2+1}\,U_1 = 0\,,$$

unde s-au utilizat notațiile :

$$(14) \qquad \begin{cases} S = L_1(C_1+C_{12}) + L_2(C_2+C_{12}) - 2MC_{12}\,, \\ K = K_1(C_2+C_{12}) + K_2(C_1+C_{12}), \\ L = L_1L_2 - M^2, \quad H = L_1K_1 + L_2K_2\,, \\ C = C_1C_2 + C_1C_{12} + C_2C_{12}\,. \end{cases}$$

Soluția ecuației (13) se poate scrie sub forma

$$(15) \qquad U_1(x,p) = A_1\exp(\alpha x) + A_2\exp(-\alpha x) + A_3\exp(\beta x) + \\ + A_4\exp(-\beta x)\,,$$

unde A_1, A_2, A_3, A_4 sînt constante de integrare iar α și β sînt rădăcinile ecuației caracteristice ale ecuației diferențiale (13) și anume :

$$(16) \qquad \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} = \frac{p\sqrt{2LC}}{\sqrt{LK\,p^2+S\mp\varphi}}\,,$$

în care

$$(17) \qquad \varphi = \sqrt{(LKp^2+S)^2 - 4LC\,(LK_1K_2p^4+Hp^2+1)}.$$

Din (7)...(12) și (15) rezultă pentru U_2 soluția

$$U_2(x, p) = A_1 N_1 \exp(\alpha x) + A_2 N_1 \exp(-\alpha x) + A_3 N_2 \exp(\beta x) + A_4 N_2 \exp(-\beta x), \tag{18}$$

unde

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1(C_1+C_{12}) - L_2(C_2+C_{12}) + L[K_2(C_1+C_{12}) - K_1(C_2+C_{12})]p^2 \mp \varphi}{2[L_1 C_{12} - M(C_2 + C_{12}) + LK_2 C_{12} p^2]}. \tag{19}$$

Înlocuind (11) și (12) în (9) și (10) și integrînd în raport cu x rezultă :

$$I_1(x, p) = -(C_1 + C_{12}) p \int U_1 \, dx + C_{12} p \int U_2 \, dx + K_1 p \frac{dU_1}{dx} + \eta_1, \tag{20}$$

$$I_2(x, p) = -(C_2 + C_{12}) p \int U_2 \, dx + C_{12} p \int U_1 \, dx + K_2 p \frac{dU_2}{dx} + \delta_2. \tag{21}$$

Constantele de integrare η_1 și η_2 se determină introducînd soluțiile (15) și (18) în (20) și (21), care se înlocuiesc apoi în (7) și (8) și se identifică coeficienții. Rezultă, în final:

$$I_1(x, p) + I_{k1}(x, p) =$$

$$= \frac{1}{L_p}\{A_1[(MN_1 - L_2)\alpha \exp(\alpha x) - R_1 \exp(\alpha l) + R_1 - LK_1 p^2 \alpha \exp(\alpha x)] -$$

$$- A_2[(MN_1 - L_2)\alpha \exp(-\alpha x) + R_1 \exp(-\alpha l) - R_1 - LK_1 p^2 \alpha \exp(-\alpha x)] +$$

$$+ A_3[(MN_2 - L_2)\beta \exp(\beta x) - R_2 \exp(\beta l) + R_2 - LK_1 p^2 \beta \exp(\beta x)] -$$

$$- A_4[(MN_2 - L_2)\beta \exp(-\beta x) + R_2 \exp(-\beta l) - R_2 - LK_1 p^2 \beta \exp(-\beta x)]\}, \tag{22}$$

$$I_2(x, p) + I_{k2}(x, p) =$$

$$= \frac{1}{L_p}\{A_1[(M - L_1 N_1)\alpha \exp(\alpha x) - T_1 \exp(\alpha l) + T_1 - LK_2 p^2 N_1 \alpha \exp(\alpha x)] -$$

$$- A_2[(M - L_1 N_1)\alpha \exp(-\alpha x) + T_1 \exp(-\alpha l) - T_1 - LK_2 p^2 N_1 \alpha \exp(-\alpha x)] +$$

$$+ A_3[(M - L_1 N_2)\beta \exp(\beta x) - T_2 \exp(\beta l) + T_2 - LK_2 p^2 N_2 \beta \exp(\beta x)] -$$

$$- A_4[(M - L_1 N_2)\beta \exp(-\beta x) + T_2 \exp(-\beta l) - T_2 - LK_2 p^2 N_2 \beta \exp(-\beta x)]\}, \tag{23}$$

unde

$$
(24)\quad \begin{cases}
R_1 = \dfrac{1}{lL_{00}}\{(M - L_1N_1)\,(L_2M_0 - ML_{02}) - \\
\qquad - (MN_1 - L_2)[M_0(M + M_0) - L_{01}(L_2 + L_{02})]\}\,, \\
R_2 = \dfrac{1}{lL_{00}}\{(M - L_1N_2)\,(L_2M_0 - ML_{02}) - \\
\qquad - (MN_2 - L_2)\,[M_0(M + M_0) - L_{01}(L_2 + L_{02})]\}\,, \\
T_1 = \dfrac{1}{lL_{00}}\{(MN_1 - L_2)(L_1M_0 - ML_{01}) - \\
\qquad -(M - L_1N_1)\,[M_0(M + M_0) - L_{02}(L_1 + L_{01})]\}\,, \\
T_2 = \dfrac{1}{lL_{00}}\{(MN_2 - L_2)\,(L_1M_0 - ML_{01}) - \\
\qquad - (M - L_1N_2)[M_0(M + M_0) - L_{02}(L_1 + L_{01})]\}\,,
\end{cases}
$$

în care s-a notat

$$
(25)\qquad L_{00} = (L_1 + L_{01})\,(L_2 + L_{02}) - (M + M_0)^2\,.
$$

Pentru determinarea constantelor de integrare $A_1,\ldots, A_4$ se folosesc condițiile la limită la extremitățile celor două înfășurări, care se introduc în ecuațiile (15), (18) și (23). Se consideră că la borna de intrare ($x = 0$) a uneia din înfășurări se aplică treapta unitate de tensiune.

Condițiile la limită sînt date în tabelul 1 pentru 12 variante de tratare a extremităților înfășurărilor. Dintre acestea, variantele *1* și *2* corespund condițiilor de încercare a izolației înfășurărilor la bancul de probă, iar restul — la diferite situații posibil a fi întîlnite în exploatare.

Obținîndu-se pentru fiecare variantă constantele de integrare și ca urmare expresiile lui $U_1(x, p)$ și $U_2(x, p)$ se determină apoi funcțiile original ale acestor expresii pentru $t \to 0$ și $t \to \infty$, adică repartițiile inițială, respectiv cvasistațională a tensiunii de-a lungul înfășurărilor. Aceste expresii sînt conținute în tabelul 2, unde :

$$
(26)\qquad \frac{N_{10}}{N_{20}} = \frac{K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12}) \mp \sqrt{K^2 - 4CK_1K_2}}{2K_2C_{12}}\,,
$$

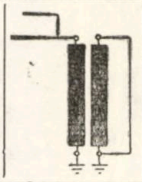
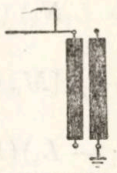
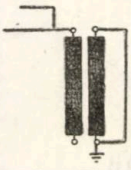
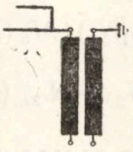
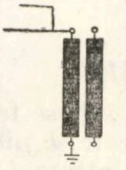
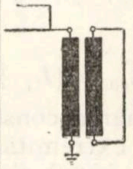
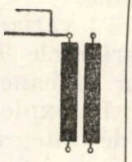
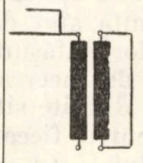
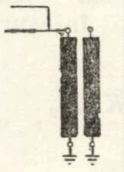
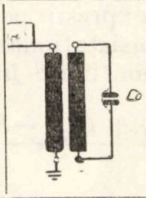
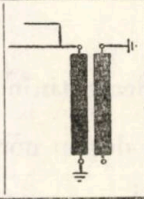
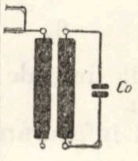
$$
(27)\qquad \begin{matrix}\alpha_0 \\ \beta_0\end{matrix} = \sqrt{\frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4CK_1K_2}}{2K_1K_2}}\,.
$$

Pentru repartițiile inițiale sînt date expresii simplificate, ținîndu-se seama de faptul că :

a) în cazul cînd înfășurarea de înaltă tensiune este de tip normal,

$$
\operatorname{sh}\alpha_0 l \approx \operatorname{ch}\alpha_0 l \gg \alpha_0 l\,, \quad \operatorname{sh}\beta_0 l \approx \operatorname{ch}\beta_0 l \gg \beta_0 l\,;
$$

Tabelul 1

Variante		Condiţii la limită	Variante		Condiţii la limită
Nr. crt.	Conexiuni		Nr. crt.	Conexiuni	
1		$u_1(0) = 1,\ u_2(0) = 0,$ $u_1(l) = 0,\ \ u_2(l) = 0.$	7		$u_1(0)=1,\ i_2(0) + ik_2(0) =$ $= 0,\ i_1(l) + ik_1(l) = 0,$ $u_2(l) = 0.$
2		$u_1(0) = 1,\ \ u_2(0) = 0,$ $i_1(l) + ik_1(l) = 0,\ u_2(l) = 0.$	8		$u_1(0) = 1,\ u_2(0) = 0,$ $i_1(l) + ik_1(l) =$ $= i_2(l) + ik_2(l) = 0.$
3		$u_1(0) = 1,\ i_2(0) + ik_2(0) = 0,$ $u_1(l) = 0,\ i_2(l) +$ $+ ik_2(l) = 0.$	9		$u_1(0) = 1,\ \ u_2(0) = u_2(l),$ $u_1(l) = 0,\ i_2(0) + ik_2(0) =$ $= i_2(l) + ik_2(l).$
4		$u_1(0) = 1, i_2(0) + ik_2(0) = 0,$ $i_1(l) + ik_1(l) = i_2(l) +$ $+ ik_2(l) = 0.$	10		$u_1(0) = 1,\ \ u_2(0) = u_2(l),$ $i_1(l) + ik_1(l) = 0,$ $i_2(0) + ik_2(0) = i_2(l) + ik_2(l).$
5		$u_1(0) = 1,\ i_2(0) + ik_2(0) = 0,$ $u_1(l) = 0,\ \ u_2(l) = 0.$	11		$u_1(0) = 1,\ u_1(l) = 0,$ $i_2(0) + ik_2(0) = i_2(l) +$ $+ ik_2(l) =$ $= C_0 \dfrac{d}{dt}[u_2(l) - u_2(0)].$
6		$u_1(0) = 1,\ \ u_2(0) = 0,$ $u_1(l) = 0, i_2(l) + ik_2(l) = 0.$	12		$u_1(0) = 1, i_1(l) + ik_1(l) = 0,$ $i_2(0) + ik_2(0) = i_2(l) +$ $= ik_2(l) =$ $= C_0 \dfrac{d}{dt}[u_2(l) - u_2(0)].$

Tabelul 2

Nr. variantei	Repartiţia evasistaţionară $u_1(x,\infty)$	Repartiţia evasistaţionară $u_2(x,\infty)$	Repartiţia iniţială — Înfăşurări normale $u_1(x,0)$	Repartiţia iniţială — Înfăşurări normale $u_2(x,0)$	Repartiţia iniţială — Înfăşurări întreţesute $u_1(x,0)$	Repartiţia iniţială — Înfăşurări întreţesute $u_2(x,0)$
1	$1-\frac{x}{l}$	0	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\beta_0 x)$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}[\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)]$	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\left[\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right]$
2	1	0	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\beta_0 x)$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}[\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)]$	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\left[\exp(-\alpha_0 x)+\frac{\frac{N_{10}}{N_{20}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}}{\frac{N_{20}\alpha_0}{N_{10}\beta_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1}\right]$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\left[\exp(-\alpha_0 x)+\frac{\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}-\frac{N_{20}\alpha_0}{N_{10}\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}}{\frac{N_{20}\alpha_0}{N_{10}\beta_{10}}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1}\right]$
3	$1-\frac{x}{l}$	$-\frac{x}{l}\cdot\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}+\frac{1}{2}\left(\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}+\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}\right)$	$\frac{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$N_{20}\frac{\frac{\beta_0}{\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$\frac{\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1\right)\exp(-\alpha_0 x)+\left[\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}\right]}{\left(\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}+\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\right)\mathrm{th}\,\beta_0 l-2}$	$\frac{N_{10}\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1\right)\exp(-\alpha_0 x)+N_{20}\left[\frac{N_{10}\alpha_{10}}{N_{20}\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}\right]}{\left(\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}+\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\right)\mathrm{th}\,\beta_0 l-2}$
4	1	$\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}$	$\frac{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$N_{20}\frac{\frac{\beta_0}{\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$\frac{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1}$	$N_{20}\frac{\frac{\beta_0}{\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l-1}$
5	$1-\frac{x}{l}$	$\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}$	$\frac{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$N_{20}\frac{\frac{\beta_0}{\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$\frac{\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}}{1-\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l}$	$N_{10}\frac{\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}}{1-\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\mathrm{th}\,\beta_0 l}$
6	$1-\frac{x}{l}$	$-\frac{x}{l}\cdot\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}$	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\beta_0 x)$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}[\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)]$	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)+\frac{N_{10}\left[\frac{1}{N_{20}\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\frac{1}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)\right]}{(N_{20}-N_{10})\left(\frac{1}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 l-\frac{1}{N_{20}\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right)}+\frac{\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0}+\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0}\right)}{(N_{20}-N_{10})\left(\frac{1}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 l-\frac{1}{N_{20}\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right)}$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)+N_{10}N_{20}\frac{\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)}{N_{20}\beta_0}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{N_{10}\alpha_0}}{(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{N_{20}\beta_0}\right)}+\frac{\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left(N_{10}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0}+N_{20}\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0}\right)}{(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{N_{20}\beta_0}\right)}$
7	1	0	$\frac{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$N_{20}\frac{\frac{\beta_0}{\alpha_0}\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)}{\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1}$	$\frac{\left(-\frac{N_{20}}{N_{10}}\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right)\exp(-\alpha_0 x)+\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}}{-\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+\frac{-\frac{N_{10}}{N_{20}}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}}{-\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}$	$N_{10}\frac{\left(-\frac{N_{20}}{N_{10}}\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right)\exp(-\alpha_0 x)+\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}}{-\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+N_{20}\frac{-\frac{N_{10}}{N_{20}}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}}{-\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}$
8	1	0	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\beta_0 x)$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}[\exp(-\alpha_0 x)-\exp(-\beta_0 x)]$	$\frac{N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}}{N_{20}-N_{10}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}$	$\frac{N_{10}N_{20}}{N_{20}-N_{10}}\left[\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)}{\mathrm{ch}\,\beta_0 l}\right]$
9	$1-\frac{x}{l}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}$	$\frac{1}{\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}+\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0\beta_0}}\left[\left(\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\exp(-\alpha_0 x)+\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\beta_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0}\right)+\left(\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\exp(-\beta_0 x)+\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0}\right)\right]$	$\frac{1}{\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}+\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0\beta_0}}\left[\left(\frac{N_{20}}{\alpha_0}-N_{10}\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\exp(-\alpha_0 x)+\frac{N_{10}}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\beta_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0}\right)+\left(\frac{N_{10}}{\beta_0}-N_{20}\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\exp(-\beta_0 x)+\frac{N_{20}}{2\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0}\right)\right]$	$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0}\left(1-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\frac{1}{\beta_0}\left(1-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\times\left\{\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\frac{1}{2\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right]\exp(-\alpha_0 x)+\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left[\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}\mathrm{sh}\,\alpha_0 x-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\mathrm{ch}\,\alpha_0 x\right]+\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\frac{1}{2\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{1}{2\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x-\frac{1}{2\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right\}$	$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0}\left(1-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\frac{1}{\beta_0}\left(1-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\times\left\{\left[\frac{N_{10}}{\alpha_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\frac{N_{10}}{2\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\right]\exp(-\alpha_0 x)+\frac{N_{10}}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left[\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}\mathrm{sh}\,\alpha_0 x-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\mathrm{ch}\,\alpha_0 x\right]+\frac{N_{20}}{\beta_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\frac{N_{20}}{2\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{N_{20}}{2\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x-\frac{N_{20}}{2\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right\}$
10	1	$\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}$	$\frac{1}{\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}-\frac{(\alpha_0+\beta_0)^2}{2\alpha_0\beta_0}}\left[\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0}\right)\exp(-\alpha_0 x)-\frac{\beta_0}{2\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\beta_0}\right)\exp(-\beta_0 x)-\frac{\alpha_0}{2\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right]$	$\frac{1}{\frac{N_{10}}{N_{20}}+\frac{N_{20}}{N_{10}}-\frac{(\alpha_0+\beta_0)^2}{2\alpha_0\beta_0}}\left[\left(N_{20}-N_{10}\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0}\right)\exp(-\alpha_0 x)-\frac{N_{10}\beta_0}{2\alpha_0}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+\frac{N_{10}}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+\left(N_{10}-N_{20}\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\beta_0}\right)\exp(-\beta_0 x)-\frac{N_{20}\alpha_0}{2\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+\frac{N_{20}}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right]$	$\frac{1}{-\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{N_{20}}{N_{10}}+\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\times\left\{\left[\frac{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{2\alpha_0}+\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\right]\exp(-\alpha_0 x)+\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left[\frac{\beta_0}{\alpha_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 x-(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\mathrm{ch}\,\alpha_0 x\right]+\frac{\alpha_0}{2\beta_0}\left[\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\mathrm{sh}\,\beta_0 x\right]+\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right\}$	$\frac{1}{-\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{N_{20}}{N_{10}}+\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\times\left\{N_{10}\left[\frac{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{2\alpha_0}+\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{20}}{N_{10}}\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\right]\exp(-\alpha_0 x)+\frac{N_{10}}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\left[\frac{\beta_0}{\alpha_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 x-(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\mathrm{ch}\,\alpha_0 x\right]+\frac{N_{20}\alpha_0}{2\beta_0}[\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)+\mathrm{sh}\,\beta_0 x]+N_{20}\left(\frac{1}{2}-\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)-\frac{N_{20}}{2}\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right\}$
11	$1-\frac{x}{l}$	$-\frac{x}{l}\cdot\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}+\frac{1}{2}\left(\frac{M+M_0}{L_1+L_{01}}+\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}\right)$	$\frac{1}{K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}-2\right)+2C_0\left(\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0\beta_0}\right)}\times\left\{\left[K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1\right)+2C_0\left(\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+C_0\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\beta_0\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+K_2\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+\left[K_2\left(\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}-1\right)+2C_0\left(\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\right]\exp(-\beta_0 x)+C_0\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\alpha_0\mathrm{sh}\,\beta_0 l}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right)+K_2\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right\}$	$\frac{1}{K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}-2\right)+2C_0\left(\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0\beta_0}\right)}\times\left\{N_{10}\left[K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}-1\right)+2C_0\left(\frac{N_{20}}{N_{10}\alpha_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+C_0N_{10}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\alpha_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+K_2N_{10}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}+N_{20}\left[K_2\left(\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}-1\right)+2C_0\left(\frac{N_{10}}{N_{20}\beta_0}-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2\alpha_0\beta_0}\right)\right]\exp(-\beta_0 x)+C_0N_{20}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\alpha_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right)+K_2N_{20}\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right\}$	$\frac{1}{K_2\left[\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l-2\,\mathrm{ch}\,\beta_0 l\right]+2C_0\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}-1\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\right]}\times\left\{\left[K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l-\mathrm{ch}\,\beta_0 l\right)+C_0\left(\frac{2N_{20}}{N_{10}\alpha_0}(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+C_0\left(\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+K_2\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+K_2\left[\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)\right]+C_0\left[\frac{1}{\beta_0}\left(2\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\frac{1}{\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{1}{\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 x-\frac{1}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x\right]\right\}$	$\frac{1}{K_2\left[\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}+\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\right)\mathrm{sh}\,\beta_0 l-2\,\mathrm{ch}\,\beta_0 l\right]+2C_0\left[\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}-1\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)+\left(\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\right]}\times\left\{N_{10}\left[K_2\left(\frac{N_{20}\beta_0}{N_{10}\alpha_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l-\mathrm{ch}\,\beta_0 l\right)+C_0\left(\frac{2N_{20}}{N_{10}\alpha_0}(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+C_0N_{10}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+K_2N_{10}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}+K_2N_{20}\left[\frac{N_{10}\alpha_0}{N_{20}\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)\right]+C_0N_{20}\left[\frac{1}{\beta_0}\left(2\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\frac{1}{\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{1}{\alpha_0}\mathrm{ch}\,\beta_0 x-\frac{1}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x\right]\right\}$
12	1	$\frac{C_{12}}{C_2+C_{12}}$	$\frac{1}{K_2(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\beta_0}{N_{10}}-\frac{\alpha_0}{N_{20}}\right)+2C_0\left[\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}-\frac{(\alpha_0+\beta_0)^2}{2\alpha_0\beta_0}\right]}\times\left\{\left[K_2\frac{N_{20}-N_{10}}{N_{10}}\beta_0+C_0\left(\frac{2N_{20}}{N_{10}}-\frac{\beta_0}{\alpha_0}-1\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+\left[-K_2\frac{N_{20}-N_{10}}{N_{20}}\alpha_0+C_0\left(\frac{2N_{10}}{N_{20}}-\frac{\alpha_0}{\beta_0}-1\right)\right]\exp(-\beta_0 x)+C_0\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\beta_0}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+C_0\left(\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right)\right\}$	$\frac{1}{K_2(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\beta_0}{N_{10}}-\frac{\alpha_0}{N_{20}}\right)+2C_0\left[\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}-\frac{(\alpha_0+\beta_0)^2}{2\alpha_0\beta_0}\right]}\times\left\{\left[K_2(N_{20}-N_{10})\beta_0+C_0N_{10}\left(\frac{2N_{20}}{N_{10}}-\frac{\beta_0}{\alpha_0}-1\right)\right]\exp(-\alpha_0 x)+\left[-K_2(N_{20}-N_{10})\alpha_0+C_0N_{20}\left(\frac{2N_{10}}{N_{20}}-\frac{\alpha_0}{\beta_0}-1\right)\right]\exp(-\beta_0 x)+C_0N_{10}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\beta_0}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right)+C_0N_{20}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 x}{\mathrm{sh}\,\beta_0 l}\right)\right\}$	$\frac{1}{K_2(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\beta_0\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{N_{10}}-\frac{\alpha_0\mathrm{ch}\,\beta_0 l}{N_{20}}\right)-2C_0\left[\frac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{2\alpha_0\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l-\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{N_{20}}{N_{10}}+\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1\right]}\times\left(\left\{K_2\frac{N_{20}-N_{10}}{N_{10}}\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l-C_0\left[\frac{\beta_0\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\alpha_0}-\left(2\frac{N_{20}}{N_{10}}-1\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\right]\right\}\exp(-\alpha_0 x)+C_0\left[(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right]-K_2(N_{20}-N_{10})\frac{\alpha_0}{N_{20}}\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)-C_0\left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\left(2\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x-\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right]\right)$	$\frac{1}{K_2(N_{20}-N_{10})\left(\frac{\beta_0\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{N_{10}}-\frac{\alpha_0\mathrm{ch}\,\beta_0 l}{N_{20}}\right)-2C_0\left[\frac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{2\alpha_0\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 l-\left(\frac{N_{20}}{N_{10}}+\frac{N_{10}}{N_{20}}\right)\mathrm{ch}\,\beta_0 l+\frac{N_{20}}{N_{10}}+\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1\right]}+\left(\left\{K_2(N_{20}-N_{10})\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l-C_0N_{10}\left[\frac{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\alpha_0}-\left(2\frac{N_{20}}{N_{10}}-1\right)(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\right]\right\}\exp(-\alpha_0 x)+C_0N_{10}\left[(\mathrm{ch}\,\beta_0 l-1)\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}-\frac{\beta_0\,\mathrm{sh}\,\beta_0 l}{\alpha_0}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0 x}{\mathrm{sh}\,\alpha_0 l}\right]-K_2(N_{20}-N_{10})\alpha_0\,\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)-C_0N_{20}\left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0(l-x)-\left(2\frac{N_{10}}{N_{20}}-1\right)\mathrm{ch}\,\beta_0(l-x)+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\mathrm{sh}\,\beta_0 x-\mathrm{ch}\,\beta_0 x\right]\right)$

b) în cazul cînd înfășurarea de înaltă tensiune este de tip întreţesut,

$$\operatorname{sh} \alpha_0 l \approx \operatorname{ch} \beta_0 l \gg \alpha_0 l.$$

3. Interpretarea rezultatelor și concluzii

Dată fiind deosebita complexitate a expresiilor obținute pentru repartiția inițială a tensiunii, interpretarea lor nu e posibilă decît în cazuri particulare. În tabelul 3 sînt date caracteristicile a patru transformatoare pentru care s-au calculat capacitățile corespunzînd schemei echivalente adoptate, rapoartele lor fiind date în tabelul 4 (aici K_1' reprezintă capacitatea longitudinală a înfășurărilor întreţesute).

Tabelul 3

Transformatorul	Puterea nominală MVA	Tensiunile nominale kV	Conexiunile	Raportul numerelor de spire w_2/w_1
T-1	40	110/6,6	Yd	0,10
T-2	63	121/10,5	Yd	0,15
T-3	3,2	35/6	Yd	0,28
T-4	25	110/11	Yd	0,21

Tabelul 4

Transformatorul	$\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{C_{12}}{C_2}$	$\frac{K_1}{C_2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$	$\frac{K_2}{C_2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$	$\frac{K_1'}{C_2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$
T-1	0,10	0,6	0,05	0,030	0,4
T-2	0,12	0,7	0,04	0,024	0,5
T-3	0,15	0,6	0,05	0,040	0,5
T-4	0,06	0,8	0,04	0,040	0,5

În cazul variantelor *11* și *12* (tabelul 1), pentru capacitatea C_0 s-au luat în considerație valori pe care le poate avea capacitatea între faze a unei linii de cablu. De observat că pentru $C_0 \to 0$ se obțin aceleași rezultate ca și în cazul variantelor *3*, respectiv *4*, iar pentru $C_0 \to \infty$ — ca și în cazul variantelor *9*, respectiv *10*.

Tabelul 5

Nr. varianței	Potențiale	T-1		T-2		T-3		T-4	
		N*)	I**	N	I	N	I	N	I
3	U_{2m} (0)	0,214	0,153	0,275	0,197	0,410	0,337	0,364	0,270
	U_{2m} (l)	0,270	0,270	0,262	0,262	0,092	0,092	0,234	0,234
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	−0,056	−0,117	0,013	−0,065	0,318	0,232	0,130	0,036
4	U_{2m} (0)	0,487	0,424	−0,537	0,458	0,502	0,428	0,618	0,502
	U_{2m} (l)	0,750	0,725	0,824	0,789	0,750	0,719	0,888	0,847
	U_{2m} (0) − U_{2m}(l)	−0,273	−0,301	−0,287	−0,331	−0,248	−0,291	−0,270	−0,345
5	U_{2m} (0)	−0,055	−0,118	−0,013	−0,066	0,308	0,334	0,130	0,034
	U_{2m} (l)	0	0	0	0	0	0	0	0
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	−0,055	−0,118	−0,013	−0,066	0,308	0,334	0,130	0,034
6	U_{2m} (0)	0	0	0	0	0	0	0	0
	U_{2m} (l)	−0,208	−0,205	−0,300	−0,296	−0,556	−0,561	−0,420	−0,415
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	0,208	0,205	0,300	0,296	0,566	0,561	0,420	0,415
7	U_{2m} (0)	−0,263	−0,326	−0,287	−0,367	−0,248	−0,322	−0,290	−0,386
	U_{2m} (l)	0	0	0	0	0	0	0	0
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	−0,263	−0,326	−0,287	−0,367	−0,248	−0,322	−0,290	−0,386
8	U_{2m} (0)	0	0	0	0	0	0	0	0
	U_{2m} (l)	0	−0,012	0	−0,016	0	−0,015	0	−0,019
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	0	0,012	0	0,016	0	0,015	0	0,019
9	U_{2m} (0)	0,243	0,209	0,269	0,227	0,250	0,211	0,299	0,248
	U_{2m} (l)	0,243	0,209	0,269	0,227	0,250	0,211	0,299	0,248
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	0	0	0	0	0	0	0	0
10	U_{2m} (0)	0,613	0,571	0,673	0,620	0,621	0,570	0,733	0,669
	U_{2m} (l)	0,613	0,571	0,673	0,620	0,621	0,570	0,733	0,669
	U_{2m} (0) − U_{2m} (l)	0	0	0	0	0	0	0	0

*) N — înfășurare normală,
**) I — înfășurare întrețesută.

Tabelul 5 (continuare)

Nr. varianței	Potențiale	$\frac{C_0}{C_2} \cdot \frac{\pi}{l}$	T-1		T-2		T-3		T-4	
			N	*I*	*N*	*I*	*N*	*I*	*N*	*I*
11	$U_{2m}(0)$	1	0,278	0,229	0,347	0,286	0,466	0,406	0,427	0,350
		5	0,323	0,285	0,395	0,347	0,510	0,463	0,489	0,418
		10	0,334	0,298	0,406	0,360	0,521	0,477	0,493	0,436
		50	0,344	0,310	0,416	0,373	0,531	0,490	0,505	0,453
	$U_{2m}(l)$	1	0,209	0,192	0,190	0,168	0,037	0,017	0,171	0,147
		5	0,164	0,136	0,142	0,107	−0,008	−0,039	0,119	0,078
		10	0,153	0,123	0,132	0,094	−0,018	−0,054	0,106	0,061
		50	0,143	0,111	0,122	0,081	−0,029	−0,067	0,093	0,043
	$U_{2m}(0) - U_{2m}(l)$	1	0,069	0,037	0,157	0,118	0,429	0,389	0,356	0,303
		5	0,159	0,149	0,253	0,240	0,518	0,502	0,370	0,340
		10	0,181	0,175	0,274	0,264	0,539	0,531	0,387	0,375
		50	0,201	0,199	0,294	0,292	0,560	0,557	0,412	0,410
12	$U_{2m}(0)$	1	0,549	0,495	0,608	0,540	0,557	0,491	0,659	0,575
		5	0,591	0,545	0,652	0,594	0,598	0,542	0,707	0,634
		10	0,610	0,557	0,671	0,606	0,618	0,554	0,730	0,650
		50	0,610	0,568	0,671	0,617	0,618	0,566	0,730	0,664
	$U_{2m}(l)$	1	0,682	0,650	0,746	0,705	0,691	0,652	0,818	0,770
		5	0,636	0,598	0,697	0,648	0,646	0,599	0,763	0,705
		10	0,723	0,585	0,795	0,635	0,725	0,586	0,858	0,689
		50	0,615	0,574	0,676	0,623	0,624	0,573	0,737	0,673
	$U_{2m}(0) - U_{2m}(l)$	1	−0,133	−0,155	−0,138	−0,165	−0,134	−0,161	−0,159	−0,195
		5	−0,045	−0,053	−0,045	−0,054	−0,048	−0,057	−0,056	−0,071
		10	−0,113	−0,028	−0,124	−0,029	−0,107	−0,032	−0,120	−0,039
		50	−0,005	−0,006	−0,005	−0,006	−0,006	−0,007	−0,007	−0,009

Din examinarea repartițiilor inițiale (fig. 2...13) se pot face următoarele constatări :

1° Repartiția inițială în înfășurarea supusă la tensiunea de impuls (denumită de aici înainte înfășurare primară) rezultă de aceeași natură ca și în cazul neluării în considerare a celei de-a doua înfășurări (denumită de aici înainte înfășurare secundară) ; modificarea condițiilor la limită în cea de-a doua înfășurare nu exercită nici o influență asupra repartiției inițiale în prima înfășurare.

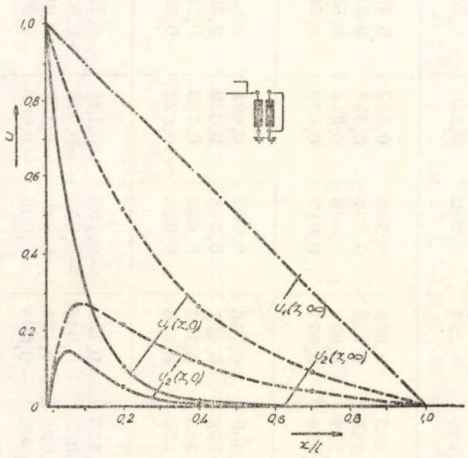


Fig. 2

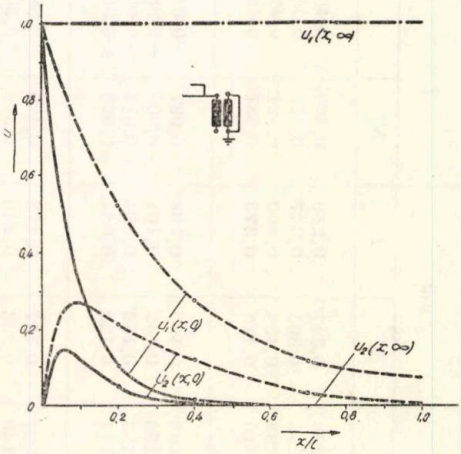


Fig. 3

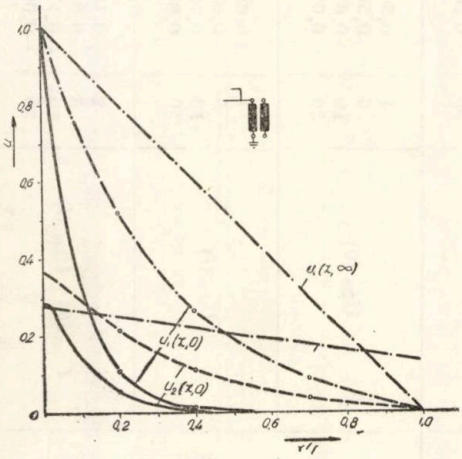


Fig. 4

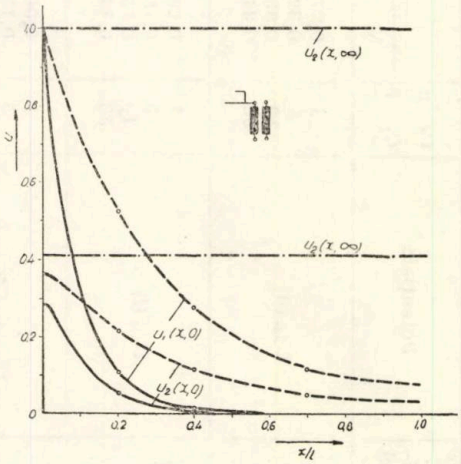


Fig. 5

2° Gradienții de potențial în înfășurarea secundară sînt mai mari (la fel ca și în cazul înfășurării primare) la începutul înfășurării, precum și la sfîrșitul ei, atunci cînd acesta este izolat.

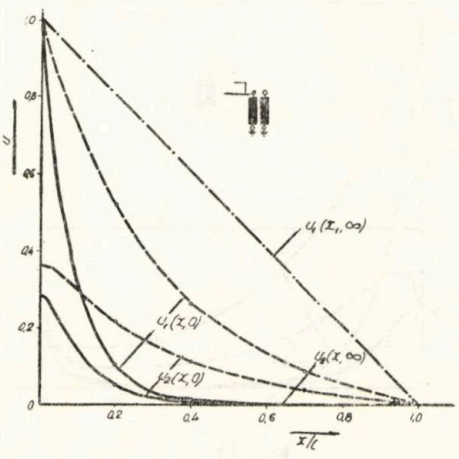


Fig. 6

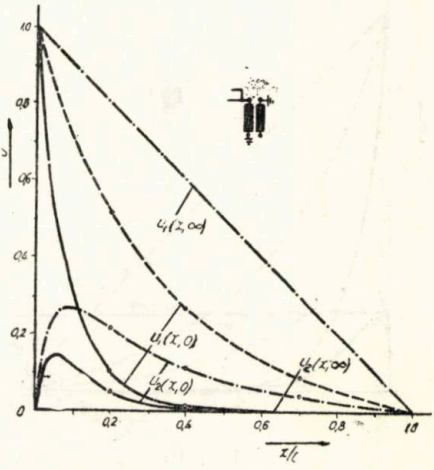


Fig. 7

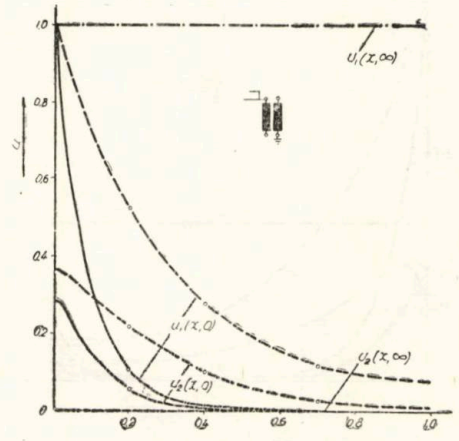


Fig. 8

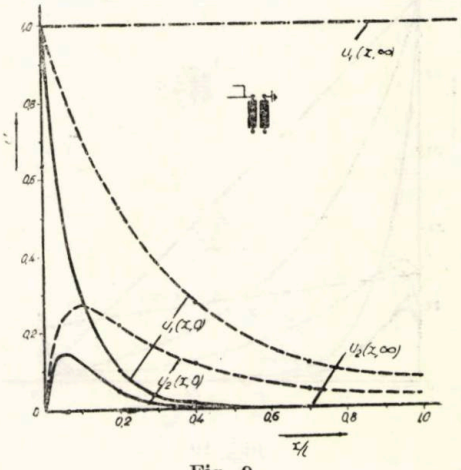


Fig. 9

3° Prin folosirea unei înfășurări întrețesute se obține în înfășurarea supusă la tensiunea de impuls efectul cunoscut de apropiere a repartiției inițiale de cea cvasistaționară. Același efect se obține și în cea de-a doua înfășurare, însă se constată totodată o creștere a gradienților de potențial la extremitățile acestei înfășurări.

4° În cazul ultimelor două variante capacitatea C_0 exercită o oarecare influență asupra repartiției inițiale la extremitățile înfășurării secundare; această influență poate fi însă privită ca neesențială.

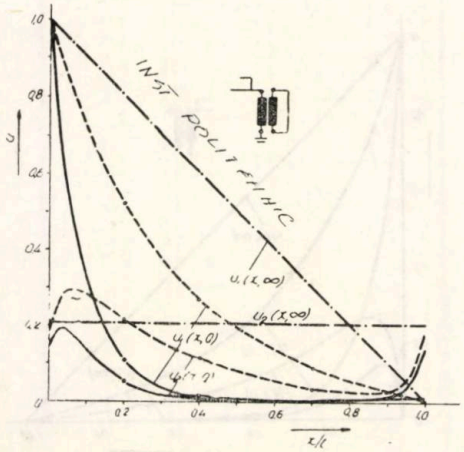


Fig. 10

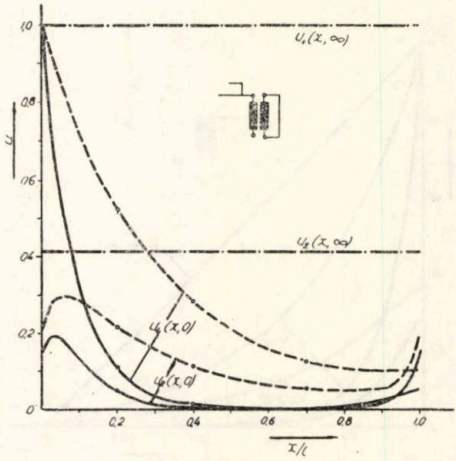


Fig. 11

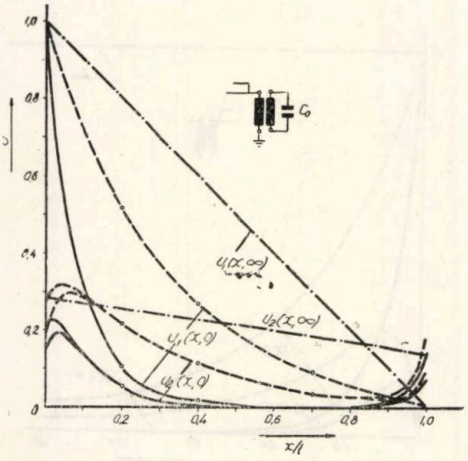


Fig. 12

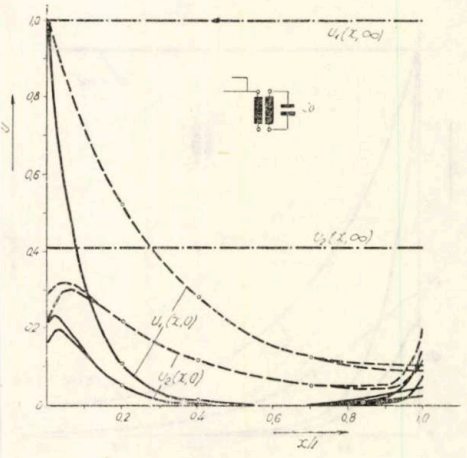


Fig. 13

În fig. 2...13 sînt reprezentate repartițiile inițiale doar pentru cazul particular al transformatorului T-2. Pentru alte tipuri de transformatoare se obțin rezultate care nu diferă între ele în mod esențial, după cum rezultă din fig. 14, unde sînt date repartițiile inițiale în cazul variantei *4* de condiții la limită pentru toate tipurile de transformatoare prezentate în tabelele 3 și 4.

În fig. 2...13 este redată și repartiția cvasistaționară a tensiunii de-a lungul înfășurărilor. Din analiza acesteia, precum și a expresiilor reparației cvasistaționare din tabelul 2, rezultă că :

a) repartiția cvasistaționară a tensiunii în înfășurarea primară are aceleași expresii cunoscute ca și în cazul considerării unei singure înfășurări, deci cea de-a doua înfășurare nu influențează fenomenele din prima ;

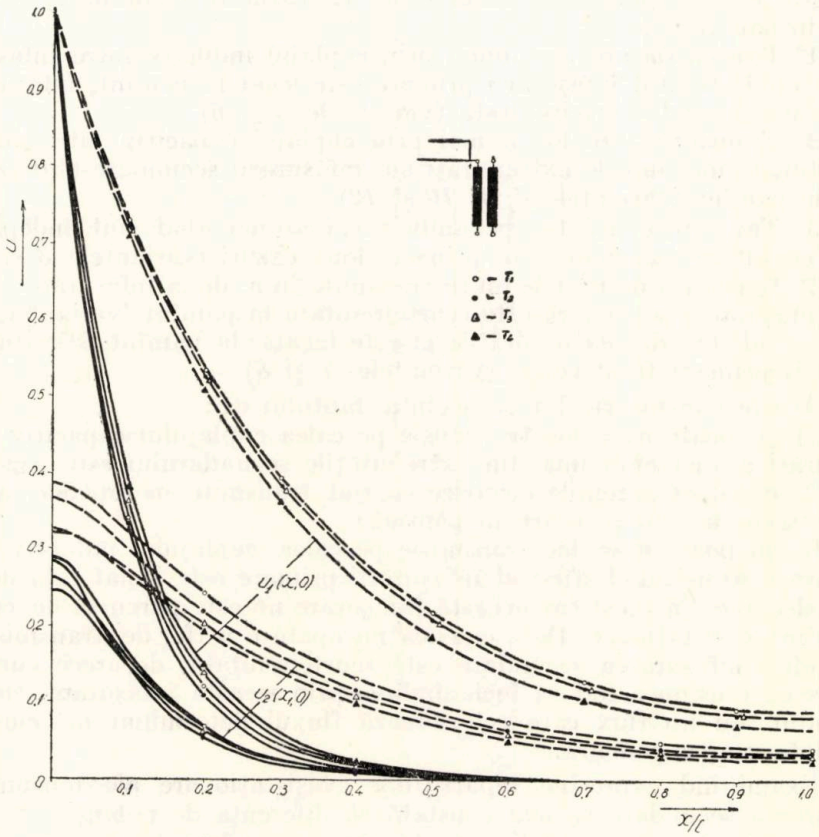


Fig. 14

b) în expresiile repartiției cvasistaționare a tensiunii în înfășurarea secundară se pun în evidență rapoartele $(M + M_0)/(L_1 + L_{01})$ și $C_{12}/(C_2 + C_{12})$, care arată că transmisia tensiunii de impuls în cea de-a doua înfășurare se poate face fie pe calea cuplajului inductiv, fie pe calea cuplajului capacitiv, fie pe ambele căi.

Dacă se consideră că în raportul de mai sus al inductivităților înfășurărilor, $M \ll M_0$ și $L_1 \ll L_{01}$, rezultă că tensiunea de impuls se poate transmite dintr-o înfășurare în alta, în cadrul regimului cvasistaționar, în raportul M_0/L_{01}, adică într-un raport aproximativ egal cu raportul numărului de spire w_2/w_1 (raportul de transformare privit dinspre înfășurarea de joasă tensiune).

Analizînd cele două căi posibile de transmisie a tensiunii de impuls în regim cvasistaționar, în cazul celor 12 variante examinate, se constată următoarele :

1° Transmisia are loc numai prin cuplajul inductiv între înfășurări atunci cînd sfîrșitul înfășurării primare este legat la pămînt, înfășurarea secundară nefiind scurtcircuitată (variantele *5* și *6*).

2° Transmisia are loc numai prin cuplajul capacitiv între înfășurări atunci cînd ambele extremități ale înfășurării secundare sînt izolate față de pămînt (variantele *4*, *9*, *10* și *12*).

3° Transmisia are loc pe ambele căi atunci cînd sînt îndeplinite toate condițiile menționate în primele două cazuri (variantele *3* și *11*).

4° Tensiunea de impuls nu se transmite în a doua înfășurare atunci cînd înfășurarea secundară este scurtcircuitată la pămînt (variantele *1* și *2*) sau cînd una din extremitățile ei este legată la pămînt, sfîrșitul înfășurării primare fiind izolat (variantele *7* și *8*).

Aceste constatări sînt consecința faptului că :

a) nu poate avea loc transmisie pe calea cuplajului capacitiv între înfășurări atunci cînd una din extremitățile secundarului este legată la pămînt, deoarece sarcinile electrice ce s-ar transmite în rețeaua capacitivă a secundarului se scurg la pămînt ;

b) nu poate avea loc transmisie pe calea cuplajului inductiv între înfășurări atunci cînd sfîrșitul înfășurării primare este izolat față de pămînt, deoarece în acest caz această înfășurare nu este parcursă de curent în regim cvasistaționar. De asemenea nu apare o astfel de transmisie în cazul cînd înfășurarea secundară este scurtcircuitată, deoarece curentul produs de tensiunea indusă închizîndu-se prin această înfășurare, creează la rîndul său un flux care echilibrează fluxul determinat de curentul prin înfășurarea primară.

Examinînd expresiile repartițiilor cvasistaționare ale tensiunii în înfășurarea secundară se mai constată că diferența de potențial la bornele acestei înfășurări este diferită de zero numai în cazul în care există transmisie pe calea cuplajului inductiv. Această diferență de potențial este egală, în toate cazurile considerate, cu raportul $(M + M_0)/(L_1 + L_{01})$, adică aproximativ cu raportul w_2/w_1 .

Aprecierea nivelului solicitărilor izolației transversale a înfășurărilor se poate face evaluînd diferența dintre repartițiile inițială și cvasistaționară. Se știe că amplitudinea maximă a oscilațiilor ce apar în înfășurări, în procesul tranzitoriu de trecere de la repartiția inițială la cea cvasistaționară, se obține în momentul $t = 0$, fiind dată de expresia

(28) $$A_m = u(x, \infty) - u(x, 0),$$

iar înfășurătoarea valorilor maxime ale amplitudinii oscilațiilor (adică potențialele față de pămînt), de expresia

(29) $$U_m = u(x, \infty) + A_m = 2u(x, \infty) - u(x, 0).$$

Aceste valori pot fi determinate pentru orice x, adică pentru orice punct din înfășurări.

În tabelul 5 sînt date potențialele $U_{2m}(0)$ și $U_{2m}(l)$ la bornele înfășurării secundare (pentru $x = 0$, respectiv $x = l$), precum și diferențele de potențial la bornele aceleiași înfășurări. Din analiza datelor din acest tabel rezultă că :

a) potențialele ce pot apare la bornele înfășurării secundare variază în limite foarte largi, de la zero pînă la aproape 90% din tensiunea aplicată înfășurării primare, fiind maxime în cazul în care celelalte borne sînt izolate față de pămînt și minime cînd sînt legate la pămînt ;

b) diferențele de potențial la bornele înfășurării secundare variază de asemenea în limite largi, fiind mai mari în cazul cînd sfîrșitul înfășurării primare este legat la pămînt, iar una din bornele secundarului e izolată față de pămînt și cu atît mai mari cu cît raportul numărului de spire (w_2/w_1) este mai mare; în funcție de varianta condițiilor la limită la borne aceste diferențe de potențial pot fi mai mari sau mai mici decît raportul numărului de spire ;

c) utilizarea la primar a unei înfășurări întrețesute duce de regulă la creșterea diferențelor de potențial la bornele secundarului și la scăderea potențialelor fiecărei borne față de pămînt.

În final se desprind următoarele concluzii mai importante :

1° Repartițiile inițială și mai ales cvasistațională în înfășurarea supusă la tensiunea de impuls nu sînt influențate de luarea în considerare a celei de-a doua înfășurări.

2° Transmisia tensiunii de impuls în cea de-a doua înfășurare se face în general într-un raport diferit de raportul de transformare.

3° Utilizarea pe partea de înaltă tensiune a transformatorului a unei înfășurări întrețesute în scopul reducerii solicitărilor izolației acestei înfășurări, poate duce, în anumite cazuri, la creșterea solicitărilor izolației înfășurării de joasă tensiune.

În cele de mai sus nu s-a putut lua în considerare transmisia tensiunii de impuls în cea de-a doua înfășurare datorită prezenței, în prima înfășurare, a proceselor oscilatorii.

Primită la 16 aprilie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Gavrilaș N., Bul. Inst. polit. Iași, IX (XII), *3—4*, 211 (1963).
2. Gavrilaș N., Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *1—2*, 335 (1967).

SUR LA TRANSMISSION DE L'ONDE DE CHOC DANS LE TRANSFORMATEUR À DEUX ENROULEMENTS

(Résumé)

En utilisant un schéma équivalent simplifié du transformateur à deux enroulements, soumis à l'onde de choc, on étudie par voie analytique la transmission de la tension de choc dans les enroulements.

On déduit les expressions des répartitions initiale et quasistationnaire de la tension le long des enroulements et en particulier pour le cas des transformateurs de puissance de haute tension.

On aboutit aux conclusions suivantes, qui sont les plus importantes :

1° Les répartitions initiale et quasistationnaire de la tension dans l'enroulement soumis à la tension de choc ne sont pas influencées par les paramètres du second enroulement.

2° L'onde de choc se transmet dans le second enroulement dans un rapport différent de celui de transformation.

3° L'utilisation d'un enroulement croisé sur la côté de haute tension afin de réduire les contraintes dans l'isolement de cet enroulement peut conduire, dans certaines circonstances, à une augmentation des contraintes dans l'isolement de l'enroulement de basse tension.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D.C. 621.313.32.013.8

THE CHOISE OF *Q*-AXIS EXCITATION REGULATOR FOR THE DIVIDED-WINDING SYNCHRONOUS GENERATORS

BY

AUREL DOBRANIŞ and RĂZVAN MĂGUREANU

1. Introduction

The increasing of total power of the electrical systems, of the length of the very high-voltage networks and of the high voltage undeground cables had as effect an increase of the produced capacitive power, wich should be compensated, the synchronous generators of the system being obliged to work underexcited [1]...[6].

The modern synchronous generators are built with high synchronous reactances (2 p.u.); at low active produced power certain difficulties apear connected with their stability for underexcited regimes.

To maintain the static stability of these generators working in capacitive regimes it is necessary to limit their stator current maximum value, respectively their absorbed reactive power much under their nominal values. To make possible the machine loading up to the nominal parameters, up to their thermical admited limits, the stability of these machines under this regime should be improved. To reach this targit many solutions were proposed: for example in [3], for a synchronous compensator it is recomanded the use of a d.c. motor mechanically connected with it, the motor torque being controlled by the compensator absorbed reactive power. Although it is a very ingenious solution its applicability was limited by its complexity. In another paper [4], the use of a synchronised induction machine is proposed. Through its slip variation the reactive power can be controlled in large limits, but owing to the large rotor currents involved, this solution also has only theoretical value.

In the H a m d i - S e p e n's paper [1] the idea of using the synchronous machines with divided-excitation windings appears for the first time, but its application was recomanded only for some transient regimes. Only S o p e r and F a g g [2] proposed its permanent utilisation, asserting that by this solution the capacity of the absorbing reactive power should be increased and limited only by thermal considerations. This appears to be the only solution wich can be applied in practice with good results, with a simple control system, stability being maintained at any internal angle.

The divided-winding excitation machine is different from the classical synchronous machine by its two rotor windings, windings arranged at an electrical angle, generally between 60° and 90°. The two excitation currents are controlled by the active and respectively reactive power, reason for which one winding is called „active" or „torque-winding" and the second „reactive-winding".

The essential advantage of this solution in respect with the classical solutions consist just in this separation of those two functions of the electromagnetic torque producing and of the reactive power producing, in the classical machines both these functions being realised by the same excitation winding.

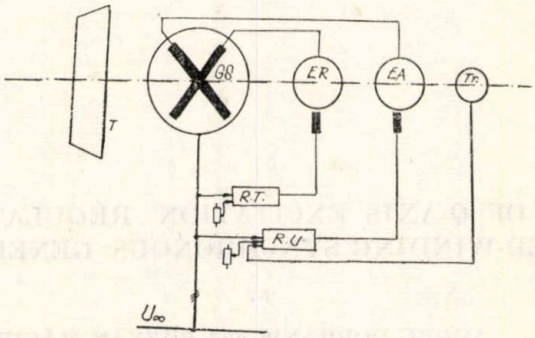


Fig. 1 — Diagram of the synchronous machine with two excitation windings: T — turbine, GS — synchronous generator, ER — exciter of reactive-winding, EA — exciter of torque-winding, Tr — rotor-angle transducer, RU — angle regulator, RT — voltage regulator, U_0 — infinite busbar.

If the axis of the „reactive-winding" is automatically maintained all the time on the axis of the resultant air-gap flux, then the variation of its current produces only a change in its reactive power, the electromagnetic torque remaining the same. The „torque-winding" secures the electromagnetic torque of the machine, and in the same time maintains a constant geometrical position of the rotor in respect with axis of the resultant flux density, in other words maintains the mechanical speed constant and avoids any mechanical oscillations.

2. The Stability of the Divided-Winding Synchronous Machine at Small Oscillations

We consider the general simplified expression of the steady-state produced reactive power of a synchronous generator connected through an equivalent line with an infinite power system:

$$(1) \qquad Q = \frac{EU}{x_d}\cos\delta - \frac{U^2}{2}\cdot\frac{x_d+x_q}{x_d x_q} + \frac{U^2}{2}\cdot\frac{x_d-x_q}{x_d x_q}\cos 2\delta,$$

where: Q — reactive power with positive direction from the generator to the system, E — e.m.f. of the machine, U — the machine output voltage, δ — load angle, x_d, x_q — longitudinal and respectively quadrature axis reactances.

Taking into account that the maximum value of the absorbed reactive power is obtained for interval angles larger then 90°, for turbogenerators about 180°, and that the machine is no longer stable for such values, an stabilising artificial method is absolutly necessary. The studies of the stability of the modern synchronous machines with single excitation winding, using the best excitation regulators, cannot exceed internal

angles beyond 134° and the absorbed reactive power for low active loads is much under them nominal parameters [5].

The divided-axis synchronous machine completely avoids these disadvantages, functioning stable at any load angle, at the same time, an increase of the absorbed reactive power up to the thermical limits of the machine being possible. At the divided-winding solution the maintaining of this stability over 90° is due to the elimination of the rigid link between the rotor and its axis of excitation field, this axis being able to rotate in respect with the rotor, thus eliminating the effect of rotor inertia.

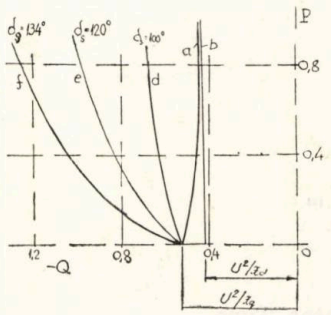


Fig. 2. — Power/reactive-power chart showing stability-limit curves.

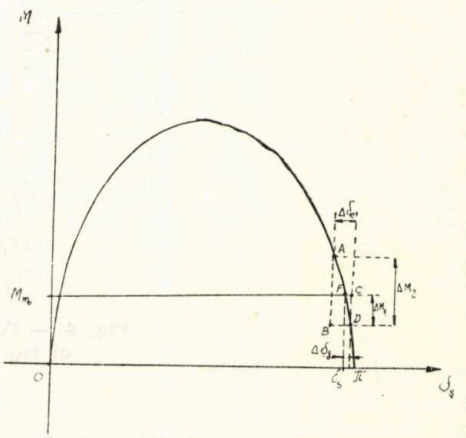


Fig. 3. — The mechanical characteristic of the nonsalient synchronous machine.

In Fig. 3 the mechanical characteristic of the nonsalient synchronous machine was presented. For load angles under 90°, the processes are analogue with those of the classical generators ; for angles beyond this limit the stability is maintained by the automatic control of the „torque-rotor winding".

Suppose (Fig. 3) the constant mechanical torque M_{m_0} acting at the classical machine shift, and a small variation $\Delta\delta_g$ of internal angle from its equilibrium position. The result will be decrease of the produced electromagnetic torque :

$$\Delta M = M_{m_0} - \Delta M_1 \tag{2}$$

and a tendency of continuosly increasing of the geometric rotor deviation in respect with the air-gap resultant flux, and finally a tendency of going out from synchronism. At the divided-winding machine, the angle transducer senses this geometrical deviation and controls the current of the „active-winding" thus, obtaining a change in the resultant flux position in respect with the rotor with the angle :

$$|\Delta\delta_e| > |\Delta\delta_g| \tag{3}$$

of different sign with perturbation.

Thus an electromagnetic torque results producing the braking of the rotor, limiting the oscillations and chancelling the initial deviation,

$$|\Delta M_2| > |\Delta M_1| . \tag{4}$$

The achievement of the stable operation depends on the qualities of the torque-winding control system and the aim of this paper is to find the most efficient regulator.

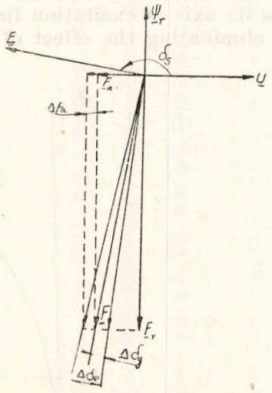


Fig. 4. — Control of the m.m.f. of the torque-winding.

3. The Choice of the Regulator Type

Taking into consideration the machine motion equation :

$$J\frac{d^2\delta_s}{dt^2} = M_m - M_e, \tag{5}$$

where : J — inertia, δ_s — load angle, M_m — turbine mechanical torque M_e — electromagnetic torque produced by the synchronous machine, the block-diagram of the linearised equations (5) is presented in Fig. 5, where it was noted with :

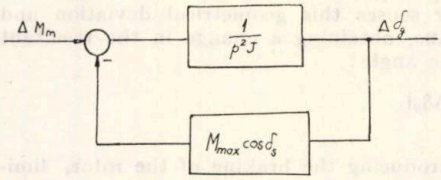


Fig. 5. — Block diagram of the synchronous machine.

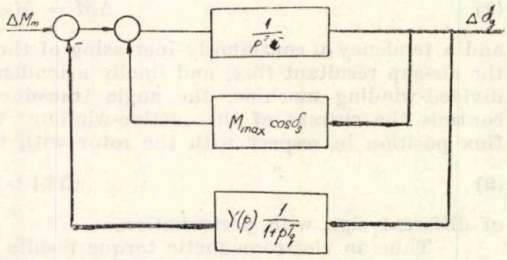


Fig. 6. — Block diagram of the synchronous machine for the torque-winding-excitation control.

$$M_{max} = m\frac{EU}{\Omega x_d}. \tag{6}$$

Introducing the reaction according to the control of the amper-turns of active-winding, the block-diagram in Fig. 6 is obtained, where $Y(p)$ is the winding-regulator transfer function and T_q the winding time constant.

The characteristic equation of the system in Fig. 6 becomes :

$$H(p) = Jp^2 + M_{max}\cos\delta_s + \frac{Y(p)}{1+T_qp}. \tag{7}$$

Applying to the equation (7), the Routh-Hurwitz criterion, the influence of different regulators on the machine stability can be obtained.

3.1. *P*-Type Regulator

Its transfer function can be written as :

$$Y(p) = K_P \tag{8}$$

and the characteristic equation will become :

$$H(p) = JT_qp^3 + Jp^2 + T_qM_{max}\cos\delta_s\, p + M_{max}\cos\delta_s + K_P. \tag{9}$$

Applying the mentioned stability criterion, the following relations can be found

$$JT_q\, M_{max}\cos\delta_s - JT_q(M_{max}\cos\delta_s + K_P) > 0, \tag{10}$$

$$(M_{max}\cos\delta_s + K_P)\,(-K_P) > 0. \tag{11}$$

Analysing these relations we can notice that when a proportional type regulator is used no system stability can be maintained, and that *P*-type system is not proper for the active-winding control.

3.2. *P D*-Type Regulator

Its transfer function can be written as :

$$Y(p) = K_P + K_Dp. \tag{12}$$

Analysing system characteristic equation :

$$H(p) = JT_qp^3 + Jp^2 + (T_qM_{max}\cos\delta_s + K_D)p + M_{max}\cos\delta_s + K_P, \tag{13}$$

the following relation between regulator parameters can be obtained :

$$K_D > K_P, \tag{14}$$

$$K_DM_{max}\cos\delta_s + K_PK_D - K_PM_{max}\cos\delta_s - K_P^2 > 0. \tag{15}$$

Transposing these relations into (K_P, K_D) plane, the stable domaine is found in Fig. 7 (the hachures parts).

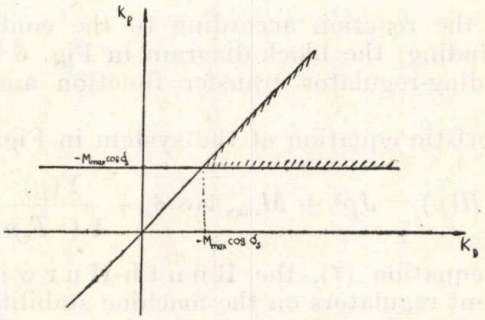


Fig. 7 — Stability-limit of the *PD* type regulator.

The minimum values for K_P, K_D results for wich the stability is maintained, proportional - differential type regulator corresponding for the torque-winding control.

3. 3. *PI* - Type Regulator

The corresponding transfer function can be written as :

$$Y(p) = K_P + \frac{1}{p} K_I \tag{16}$$

and the characteristic equation results :

$$H(p) = JT_q p^4 + Jp^3 + T_q M_{\max} \cos \delta_s \, p^2 + (M_{\max} \cos \delta_s + K_P)p + K_I. \tag{17}$$

With the same stability criterium, we can obtain the conditions :

$$JT_q M_{\max} \cos \delta_s - JT_q(M_{\max} \cos \delta_s + K_P) > 0, \tag{18}$$

$$(M_{\max} \cos \delta_s + K_P)(-K_P) - J^2 K_I > 0, \tag{19}$$

wich cannot be satisfied, and the system is instable, proportional - integral regulator being not suitable for such a control.

3. 4. *PID* - Type Regulator

The ***PID*** regulator transfer function is :

$$Y(p) = K_P + K_D p + K_I \frac{1}{p} \tag{20}$$

and the system characteristic equation becomes :

$$H(p) = JT_q p^4 + Jp^3 + (T_q M_{\max} \cos \delta_s + K_D)\, p^2 + \tag{21}$$
$$+ (M_{\max} \cos \delta_s + K_P)p + K_I.$$

Applying the Routh-Hurwitz criterion to this equation the following relations between the parameters of the regulator can be obtained :

$$K_D > K_P, \tag{22}$$

$$K_D M_{\max} \cos \delta_s + K_P K_D - K_P M_{\max} \cos \delta_s - K_P^2 - J^2 K_I > 0, \tag{23}$$

$$-J^2 K_I^2 + K_I K_D M_{\max} \cos \delta_s + K_I K_P K_D - K_I K_P M_{\max} \cos \delta_s - K_I K_P^2 > 0. \tag{24}$$

Transposing these relations into (K_D , K_I) plane, the stability domaine represented in Fig. 8 is obtained. It results that a proportional-integral-differential regulator is proper for such a kind of control.

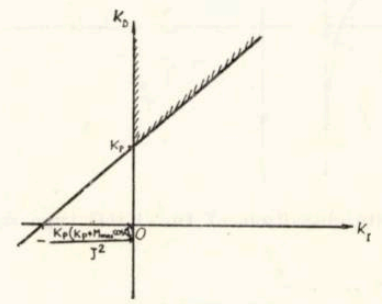


Fig. 8. — Stability-limit of the *PID* type regulator.

3. 5. *PDD* - Type Regulator

Introducing the transfer function for the regulator

$$Y(p) = K_P + K_D p + K_{D_2} p^2 \tag{25}$$

the characteristic equation becomes :

$$H(p) = Jp^3 + (J + K_{D_2})p^2 + (T_q M_{\max} \cos \delta_s + K_D)p + M_{\max} \cos \delta_s + K_P. \tag{26}$$

The following conditions for the system stable operation result :

$$J + K_{D_2} > 0, \tag{27}$$

$$JK_D + K_D K_{D_2} + K_{D_2} T_q M_{\max} \cos \delta_s + J[(T_q - 1)M_{\max} \cos \delta_s - K_P] > 0, \tag{28}$$

$$(M_{\max}\cos\delta_s + K_P)\{JK_D + K_DK_{D_2} + K_{D_2}T_qM_{\max}\cos\delta_s +$$

$$+ J[(T_q - 1)M_{\max}\cos\delta_s - K_P]\} > 0. \tag{29}$$

If we represent these equations in (K_D, K_{D_2}) plane we obtain the stability domaine (Fig. 9 — the hachures parts). It results that PDD_2-regulators presents advantageous control characteristics.

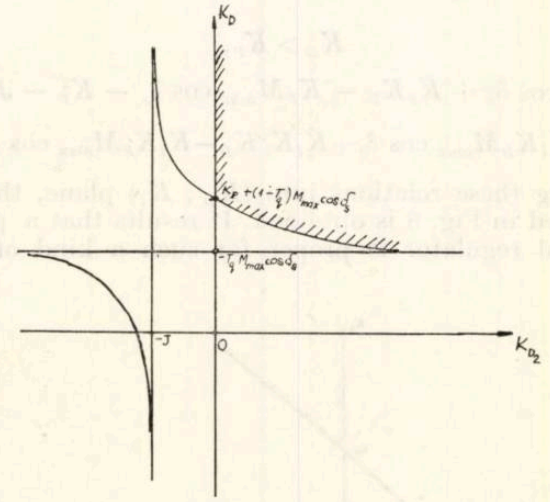


Fig. 9. — Stability-limit of the PDD type regulator.

4. Conclusions

Owing to the increase of the dimensions and voltages of power systems a large amount of capacitive power has to be compensated, and as a result non stable regimes for synchronous generators can appear. The divided-winding synchronous machine is a good solution for improuving system stability, the new generator being able to work stable at load angles up to 180°. To ensure stable operation in these limits a special attention has to be paid to the active-winding regulator. In the present paper five types of regulators were discussed. Only those containing a derivative element lead to a stable operation. According to the R o u t h-H u r w i t z criterion the gain constants of the regulators are obtained.

Received, Mai 6, 1972

Polytechnic Institute „Gh. Gheorghiu-Dej",
Bucharest,
Dept. of Electrical Machines

REFERENCES

1. Hamdi-Sepen C., *Procédé pour augmenter les puissances limites transmissibles par les lignes de transport d'énergie à courant alternatif en régime transitoire.* CIGRE, Rapp. No. *305* (1962); Rapp. No. *304*, *304 A* (1964).
2. Soper J. A., Fagg A. R., *Divided-winding-rotor Synchronous Generator.* Proc. IEE, **116**, *1*, 113–126 (1969).
3. DelPedro M., Wavre A., *Stabilisation artificielle d'un compensateur synchrone par l'asservissement d'un couple moteur à son angle polaire.* CIGRE, Rapp. No. *128*, 1948.
4. Ботвинник М., Сакарян Ю., *Управляемая машина переменного тока.* Изд. „Наука", М., 1969.
5. Jacovides L. J., Adkins B., *Effect of Excitation Regulation on Synchronous-machine Stability.* Proc. IEE, **113**, *6*, 1021–1034 (1966).
6. Dobraniș A., *Considerații privind mașinile sincrone cu excitație pe două axe.* St. cerc. energ. electr., **XXII**, *1*, 207–215 (1972).
7. Crary S., *Power System Stability.* Vol. I, II, John Wiley & Sons, New-York, 1954.
8. Papadache I. a.o., *Regulatoare electronice.* Ed. Tehn., Buc., 1966.
9. Adkins B., *The General Theory of Electrical Machines.* Chapman a. Hall, London, 1959.

ALEGEREA TIPULUI DE REGULATOR AL EXCITAȚIEI TRANSVERSALE A MAȘINII SINCRONE CU EXCITAȚIE PE DOUĂ AXE

(Rezumat)

Se analizează comportarea generatoarelor sincrone cu excitație pe două axe la funcționarea în regimuri capacitive.

Se stabilește modul de reglare adecvat pentru excitația din axa transversală a acestor mașini, în scopul asigurării funcționării lor stabile la orice unghi de sarcină. Se evidențiază principalele tipuri de regulatoare care pot îndeplini funcțiile cerute de un astfel de generator, stabilindu-se și valorile necesare pentru parametrii acestora.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C.Z. 621.313.333.4

CU PRIVIRE LA POSIBILITATEA COMANDĂRII CIRCULAŢIEI PUTERII ÎNTRE TREPTELE UNUI MOTOR CU ROTOR DUBLU*)

DE

EMIL TEODORU

1. Introducere

Folosirea motoarelor asincrone în acţionări electrice a dus la imaginarea unor sisteme constituite din grupuri de motoare cuplate mecanic şi electric [2]. Motorul asincron cu rotor dublu [1] a început să fie folosit în astfel de acţionări, în care prima treaptă este asincronă iar a doua joacă un rol de cuplaj electromagnetic [5], [6], cît şi în automatică, concurînd cu succes servomotorul cu rotorul în formă de pahar [3]. Realizarea unui motor cu rotor dublu, la care prima treaptă este asincronă cu rotor bobinat, iar a doua sincronă, permite comanda curentului de excitaţie funcţie de cuplul rezistent aplicat uneia din trepte.

2. Consideraţii teoretice

În cele ce urmează se stabilesc bazele teoretice ale procesului de autocomandă a circulaţiei puterii reactive între treptele unui motor cu rotor dublu.

A fost conceput un motor cu rotor dublu, construcţie tandem, la care prima treaptă este constituită dintr-un motor asincron trifazat cu rotorul bobinat, a doua treaptă fiind sincronă (fig. 1).

În circuitul rotoric al primei trepte este introdusă o punte redresoare care se închide pe şuntul R_s. Tensiunea de comandă U_i este aplicată amplificatorului al cărui circuit de ieşire alimentează excitaţia treptei sincrone. Sistemul de reglare funcţionează indiferent de treapta la care se aplică cuplul rezistent (treapta întîia, a doua sau la ambele trepte simultan). Comportarea motorului cu rotor dublu este caracterizată complet de cele două motoare elementare.

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică jubiliară „60 ani de învăţămînt electrotehnic în Iaşi", 21—23 decembrie 1972.

În cazul apariţiei unui cuplu rezistent la arborele celei de a doua trepte, cuplurile electromagnetice transmise de cele două trepte sînt egale dacă se neglijează pierderile ce trebuie acoperite de rotorul intermediar. Sistemul prezentat reglează în final puterea reactivă de pe treapta a doua funcţie de cuplul rezistent. Puterea reactivă constituie mărimea de ieşire iar cuplul electromagnetic mărimea de intrare.

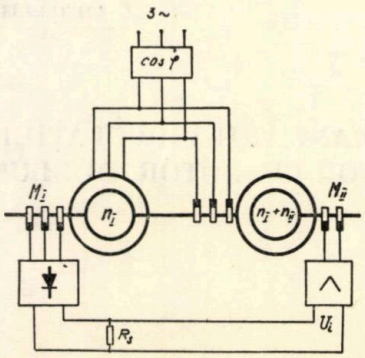


Fig. 1

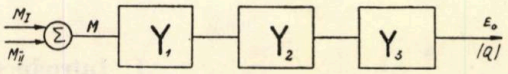


Fig. 2

Pentru stabilirea funcţiei de transfer se va analiza fiecare verigă constitutivă a sistemului (fig. 2).

Sistemul de reglare fiind deschis iar verigile legate în serie, funcţia de transfer se obţine prin produsul funcţiilor de transfer ale fiecărei verigi:

$$Y(p) = Y_1(p)Y_2(p)Y_3(p). \tag{1}$$

Pentru motorul asincron cuplul electromagnetic este dat de relaţia

$$M = \frac{m_1}{\Omega_1} E_2' I_2' \cos \psi_2, \tag{2}$$

în care se poate considera, cu o bună aproximaţie, $\cos \psi_2 \cong 1$.

Rezultă, în final, pentru funcţia de transfer, expresia:

$$Y_1(p) = \frac{I_2(p)}{M(p)} = \frac{K_{MI}}{p}. \tag{3}$$

Pentru amplificator — în cazul de faţă o amplidină — se consideră expresia aproximativă a funcţiei de transfer:

$$Y_2(p) = \frac{K_A}{1 + T_A p}. \tag{4}$$

Pentru funcția de transfer a treptei a doua se va ține seama de faptul că dependența dintre puterea reactivă Q și t.e.m. E_0 se exprimă prin relația :

$$Q = \frac{3E_0U}{X}\cos\theta - \frac{3U^2}{X}. \tag{5}$$

Va trebui să se stabilească legătura între t.e.m. E_0 și tensiunea de excitație U_e. Ecuația tensiunii aplicate circuitului de excitație la funcționarea în gol a motorului este :

$$u_e(t) = R_e i_e(t) + w_e \frac{d\Phi_e(t)}{dt}. \tag{6}$$

Dacă se notează cu $T_M = w_e\Phi_{e0}/U_{e0}$ constanta de timp a celui de al doilea rotor, relația (6) devine :

$$u_e(t) = \frac{U_{e0}}{E_0}\left[e_0(t) + T_M\frac{de_0(t)}{dt}\right]. \tag{7}$$

Aplicînd transformata Laplace relației (7) se obține :

$$Y_3(p) = \frac{E_0(p)}{U_e(p)} = \frac{K_{M_{II}}}{1 + T_M p}, \quad \left(K_{M_{II}} = \frac{E_0}{U_{e0}}\right). \tag{8}$$

Funcția de transfer a motorului cu rotor dublu în schema de autocomandă a circulației puterii între treptele motorului este deci de forma :

$$Y(p) = \frac{K}{p(1 + T_A p)(1 + T_M p)}, \quad (K = K_{M_I}K_A K_{M_{II}}). \tag{9}$$

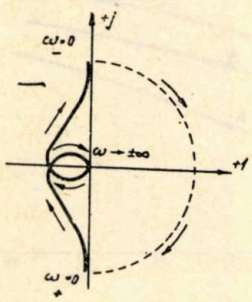


Fig. 3

Funcția de transfer neavînd poli și nici zerouri în semiplanul drept al planului complex (fig. 3), este stabilă conform criteriului lui N y q u i s t.

La aceeași concluzie se ajunge dacă se studiază originalul funcției de transfer :

$$(10) \qquad E_0 = M\left[\frac{K}{T_A T_M} + \frac{K}{T_M - T_A}\left(\frac{e^{-T_M t}}{T_M} - \frac{e^{-T_A t}}{T_A}\right)\right].$$

În cazul folosirii reacţiei negative după curent, pentru menţinerea stabilităţii este necesară condiţia suplimentară :

$$(11) \qquad K \ll \left(\frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_M}\right).$$

3. Consideraţii experimentale

Încercările experimentale au fost efectuate pe un montaj a cărui schemă este reprezentată în fig. 1. Motorul cu rotor dublu, construcţie tandem cu ambele trepte asincrone, a fost folosit în acest montaj cu a doua treaptă sincronizată. În circuitul rotoric al primei trepte a fost introdusă o punte redresoare cu elemente de seleniu. Prin intermediul şuntului R_s se aplică tensiunea U_t (proporţională cu curentul I_2) înfăşurării de comandă a amplitudinii. Curentul din circuitul de ieşire constituie curentul de excitaţie al treptei sincrone. Variind cuplul rezistent se modifică curentul de excitaţie, deci puterea reactivă care circulă între treptele motorului şi reţeaua de alimentare, rezultînd o ameliorare a factorului de putere.

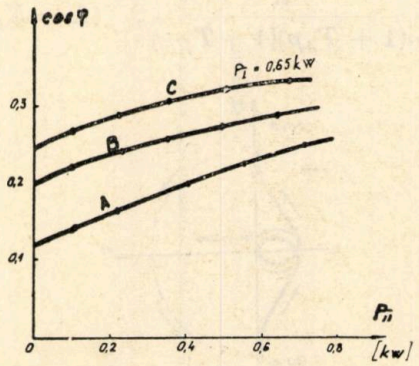


Fig. 4

Din fig. 4 se observă o îmbunătăţire a factorului de putere (curbele B şi C) faţă de motorul dublu clasic (curba A). Curba C este trasată în condiţia prezenţei unei sarcini constante pe arborele primei trepte.

3. Concluzii

Se studiază stabilitatea unei scheme de motor cu rotor dublu, cu o treaptă sincronizată excitată de la rotorul primei trepte prin amplificator.

Se deduc parametrii care favorizează stabilitatea sistemului aplicînd criteriul Nyquist. Din studiul funcției de transfer rezultă că sistemul imaginat este stabil.

Din analiza datelor experimentale rezultă concluzia că acțiunea de vehiculare a puterii reactive în funcție de sarcina mecanică pe arbore prezintă avantaje în ce privește factorul de putere al sistemului. Sistemul este prevăzut cu posibilități de reglaj a circulației puterii reactive permițînd îmbunătățirea factorului de putere al ambelor trepte.

Se întrevede posibilitatea unui schimb al puterilor active între treptele motorului cu rotor dublu.

Primită la 26 ianuarie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică generală și mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Alquist H., *Mehrfachlaufer Motoren hoher Drehzahl.* ETZ, *16*, 386—389 (1934).
2. Boțan N. V., *Considerațiuni asupra posibilităților de reglare a vitezei unui grup de două motoare asincrone funcționînd coaxial.* Bul. Inst. polit. Iași, s. III, XVI (XX), *1—2*, 1—8 (1970).
3. Kelly H. D., *Double Rotor Induction Motor.* I.E.E.E., Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS 88, *7*, 1086—1092 (1969).
4. Penescu C. I., *Automatica și telemecanica sistemelor energetice.* Vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1959.
4. Rabiej I., *Silnic dwuwirnikowy w ukladzie napedowym o plynnej regulacji obrotow.* Przeglad Electrot., 37, *6*, 247—249 (1961).
6. Rabiej I., *Uklad napedowy pradu zmiennego zlozony z maszyny dwuwirnikowej i maszyny asynchronicznej o wirujacym stojanie.* Electryka (Szczecin), *12*, 61—73 (1971).

ABOUT THE POSSIBILITY OF CONTROLLING THE POWER FLOW BETWEEN THE SECTION OF DOUBLE-ROTOR MOTOR

(Summary)

A self-control arrangement of power flowing between the section of a double-rotor motor is shown. The transfer function of the system is written and the operation stability is studied. From the experimental results an improvement of the power-factor is obvious.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

УДК 612.3.078

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СТРУКТУР НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОСНОВАННОЙ НА НОВОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ УМНОЖЕНИЯ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ (II)

ВАЛЕРЮ МУНТЯНУ и ЛЕОПОЛД СЕБАСТИАН

1. В статье [1] были установлены правила при помощи которых можно установить эквивалентные структуры для сериесной группировки двух линейных, нестационарных звеньев, инерционного типа. В настоящей статье авторы дают новую интерпретацию каскаду из

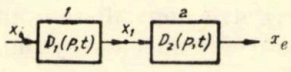


Рис. 1

двух линейных, нестационарных звеньев, форсирующего типа, связанных последовательно и указывают особые свойства такого каскада. Будь на рис. 1 такой каскад содержащий звенья *1* и *2* описанные следующими уравнениями :

$$D_1(p,t)\,x_i = x_1\,, \qquad D_2(p,t)\,x_1 = x_e\,, \tag{1}$$

где

$$D_1(p,t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)p^j\,, \qquad D_2(p,t) = \sum_{k=0}^{n} b_k(t)p^k \tag{2}$$

представляют собой линейные дифференциальные операторы с $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ а $a_j(t)$ и $b_k(t)$ — непрерывные функции времени допускающие столько непрерывных производных сколько указывают соответствующие операции. Исключив из уравнений (1) промежуточную переменную x_1, получаем

$$D_2(p, t) \ast D_1(p, t)\, x_i = x_e \,. \tag{3}$$

На основании классических правил, для умножения двух дифференциальных линейных операторов, употребляется выражение

$$\left[\sum_{k=0}^{n} b_k(t)(p+s)^k \sum_{j=0}^{m} a_j(t)s^j\right] x_i = x_e\,, \tag{4}$$

в котором s — оператор дифференцирования прикладываемый только величине x_i. Выражение (4) может быть написано

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} b_k(t)\left[s^k + \sum_{g=1}^{k}\binom{k}{g} s^{k-g} p^g\right]\sum_{j=0}^{m} a_j(t)s^j\right\} x_i = x_e\,, \tag{5}$$

где

$$\binom{k}{g} = \frac{k!}{g!(k-g)!}$$

или

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j(t)b_k(t)s^{k+j}\right] x_i + \left[\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{g=1}^{k}\binom{k}{g} b_k(t)a_j^{(g)}(t)s^{j+k-g}\right] x_i = x_e\,, \tag{6}$$

где

$$a_i^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^k a_i(t)}{\mathrm{d}t^k}\,.$$

2. Нетрудно заметить что первый термин левой части выражения (6) представляет собой алгебраическое умножение операторов

$$D_1(s, t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)s^j \quad \text{и} \quad D_2(s, t) = \sum_{k=0}^{n} b_k(t)s^k, \tag{7}$$

в которых s играет роль алгебраической переменной, то есть

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j(t)b_k(t)s^{k+j}\right] x_i = D_1(s, t)D_2(s, t)x_i = D_2(s, t)D_1(s, t)x_i. \tag{8}$$

Обозначив

$$N_j = \sum_{k=1}^{n} b_k(t)a_j^{(k)}(t), \qquad (j = 0, 1, \ldots, m), \tag{9}$$

и сделав аналогичные расчеты как в [1], считая формально в этих расчетах что

$$a_j^{(-g)} = 0, \qquad (g = 0, 1, \ldots, n), \tag{10}$$

получаем для уравнения (6) следующее выражение

$$x_e = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j(t)b_k(t)s^{k+j}\right]x_i + \left[\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^l N_j}{\mathrm{d}a_j^l}s^{l+j}\right]x_i \tag{11}$$

или

$$x_e = \boldsymbol{D}_1(s,t)\boldsymbol{D}_2(s,t)x_i + \left[\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^l N_j}{\mathrm{d}a_j^l}s^{l+j}\right]x_i . \tag{11'}$$

3. Таким образом вместо выражения (3), соответствующего структурной схеме изображенной на рис. 1, получилось выражение (11), или же (11′). Нетрудно заметить что последним двум выражениям соответствует структурная схема изображенная на рис. 2. В этой схеме, как видно из выражения (8), блоки *1* и *2* перемещаемы между собой.

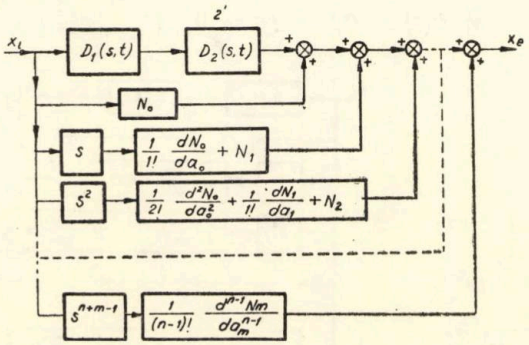


Рис. 2

При таком перемещении свойства системы не меняются. Конечно схемы изображенные на рис. 1 и 2 эквиваленты. На последней схеме N_j и свои производные различных порядков расчитываются при помощи выражений (9) и (12). Последние выводятся аналогично как в [1]. Конечно в этих расчетах имеется в виду выражение (10):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}a_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k b_k(t) a_j^{(k-1)}(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 N_j}{\mathrm{d}a_j^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) b_k(t) a_j^{(k-1)}(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{12}$$

Если на рис. 1 переместить между собой блоки *1* и *2* (рис. 3) то на основании аналогичных расчетов получается

$$x_e = \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j(t)b_k(t)s^{k+j}\right]x_i + \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^l M_k}{\mathrm{d}b_k^l}s^{l+k}\right]x_i \tag{13}$$

или

$$(13') \qquad x_e = \boldsymbol{D}_1(s,t)\,\boldsymbol{D}_2(s,t)\,x_i + \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^l \boldsymbol{M}_k}{\mathrm{d}b_k^l}\,s^{l+k}\right]x_i,$$

где

$$(14) \qquad \boldsymbol{M}_k = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\,b_k^{(j)}(t), \qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{M}_k}{\mathrm{d}b_k} = \sum_{j=1}^{m} j a_j(t)\,b_k^{(j-1)}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}_k}{\mathrm{d}b_k^2} = \sum_{j=1}^{m} j(j-1)a_j(t)\,b_k^{(j-2)}(t)\ ,\ldots,\ (k = 0,\,1,\ldots,\,n).$$

В выражениях (14) берется

$$(15) \qquad b_k^{(-g)}(t) = 0, \qquad (g = 0,\ 1\ ,\ldots,\ n).$$

Рис. 3

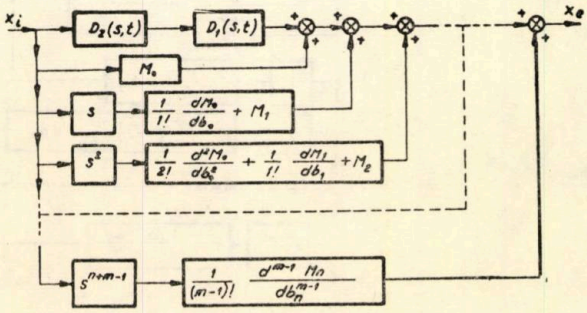


Рис. 4

Графическая интерпретация выражения (13) или же (13′) дана в виде структурной схемы изображенной на рис. 4.

Выводы

Из вышеуказанного анализа вытекает следующие вывсды :

а) Структурные схемы изображенные на рис. 1 и 2 эквивалентны между собой, а также и схемы изображенные на рис. 3 и 4.

б) Со схемами изображенными на рис. 2 и 4 можно производить все операции преобразования структурных схем линейных стационарных систем.

в) В частности эти схемы допускают теорему М е з о н а из теории графов [6] так само как и структурные схемы линейных стационарных систем. При помощи этой теоремы можно определить связь между x_i и x_e, которая получается в виде линейного дифференциального уравнения $m + n$ порядка.

г) Формула М е з о н а, при ее употреблении для расчета таких схем, соответствует новому варианту умножения двух линейных дифференциальных операторов.

д) Для того что бы блоки *1* и *2* (рис. 1) были взаимно перемещаемы достаточно что бы параллельные связи схем изображенных на рис. 2 и 4 были тождественно равны, то есть

$$(16)\qquad \begin{cases} N_0 \equiv M_0 , \\ \dfrac{1}{1!}\cdot\dfrac{dN_0}{da_0} + N_1 \equiv \dfrac{1}{1!}\cdot\dfrac{dM_0}{db_0} + M_1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\cdot\dfrac{d^{n-1}N_m}{da_m^{n-1}} \equiv \dfrac{1}{(m-1)!}\cdot\dfrac{d^{m-1}M_n}{db_n^{m-}} . \end{cases}$$

е) Серийсная группировка нескольких линейных нестационарных форсирующих звеньев осуществляется группируя их по двое и применяя вышеуказанный алгоритм.

ж) Сравнив выводы исходящие из анализа серийсной группировки двух нестационарных инерционных звеньев с выводами соответствующими такой же группировки двух форсирующих звеньев, видно что эквивалентные структуры различны, хотя что в последнем итоге эти выводы, и одни и другие истекают из умножения двух линейных дифференциальных операторов. Это конечно объясняется тем что операторы употребляемые в таких случаях описывают звенья различной натуры.

Поступило 26 марта 1972

Яский политехнический институт,
Лабораторя автоматизаций

ЛИТЕРАТУРА

1. С е б а с т и а н Л., М у н т я н у В., *Об эквивалентности структур автоматических нестационарных систем, основанной на новой интерпретации умножения двух линейных дифференциальных операторов* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVIII(XXII)**, *3—4* (1972).
2. S e b a s t i a n L., M u n t e a n u V., *Considérations sur l'équivalence des structure des systèmes automatiques à paramètres variables dans le temps.* Automatisme *1—2* (1972).
3. С о л о д о в Л. В., *Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами.* ГФМЛ, М., 1962.
4. K i r s z e m b l a t A., *Calcul opérationnel des systèmes linéaires paramétriques.* Ann. des telecom., **24**, *11—12* (1969).
5. S t u b b e r u d A. R., *Linear Time Variable System Synthesis Techniques in Modern Control Systems Theory.* C. T. Leondes, Mc. Graw Hill, New York, 1965.
6. M a s o n J., Z i m m e r m a n n F., *Electronic Circuits Signals and Systems*, J. Willey, New York, 1961.

ASUPRA ECHIVALENŢEI STRUCTURILOR SISTEMELOR AUTOMATE NESTAŢIONARE BAZATĂ PE O NOUĂ INTERPRETARE A APLICĂRII UNUI OPERATOR DIFERENŢIAL LINIAR ASUPRA ALTUI OPERATOR DIFERENŢIAL LINIAR (II)

(Rezumat)

Se stabilesc anumite reguli care stau la baza întocmirii structurilor echivalente în cazul conectării în serie a două verigi liniare, cu forţare şi nestaţionare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

УДК 621.316.718.5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЯЗИ С РЕГУЛИРУЕМЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ С ДВУМЯ АСИНХРОННЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ, ИЗ КОТОРЫХ ОДИН С ВРАЩАЮЩЕМСЯ СТАТОРОМ

ЕУДЖЕН БАЛАБАН, КОРНЕЛИЮ БОЦАН, МИРЧА ДИЯКОНЕСКУ, Н. В. БОЦАН и ЛЕОПОЛД СЕБАСТИЯН

1. В одной из предыдущих работ [1] авторы теоретически обосновали возможность регулирования скорости групы составленой из двух асинхронных двигателей, из которых один с вращающимся статором. Было исследовано действие угла сдвига вращающегося статора, при симметричном как и при несимметричном питании двигателей. Теоретические исследования привели к установлению аналитических выражений механических характеристик для данной групы, при наличии двух факторов: угол сдвига и степень несимметрии, влияющих на поведение групы.

2. Ниже приводятся экспериментальные исследования проверяющие теоретические выводы. Для этого использовалась экспериментальная установка, приведенная на рис. 1. При отсуствии асинхронного двигателя с вращающемся статором, сдвиг статорных напряжений двигателя M_2 был осуществлен при помощи асинхронного преобразователя фаз $ПФ$. Между преобразователем $ПФ$ и статором двигателя M_2 был введен автотрансформатор AT, для поддержки питания на желательном уровне.

Величина угла сдвига между статорными напряжениями измерялась вольтметрами B_{1-3} и углом на который поворачивался каждый раз преобразователь фаз.

Экспериментальные измерения проводились при симметричном а также при несимметричном питании двигателя M_2. Механические характеристики для угла сдвига статорных напряжений на 0°, 35°, 60°, 90°, 135° и 180°, приведены на рис. 2 ... 10.

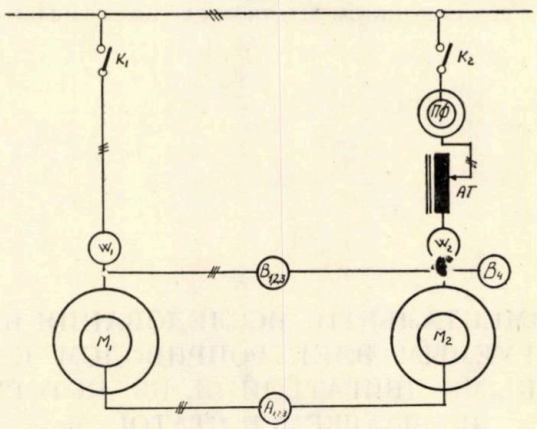


Рис. 1

3. Из анализа приведеных экспериментальных характеристик следует :

а) В случае симметричного питания обоих двигателей, диапазон изменения скорости больше чем в случае нессиметричного питания одного из двигателей. Эти пределы сужаются до определенной степени несимметрии, после чего расширяются. В самом деле, как это следует из сопоставления рис. 2 и 3, при различных значений угла сдвига порядок характеристик остается неизменным, а имено полученые харак-

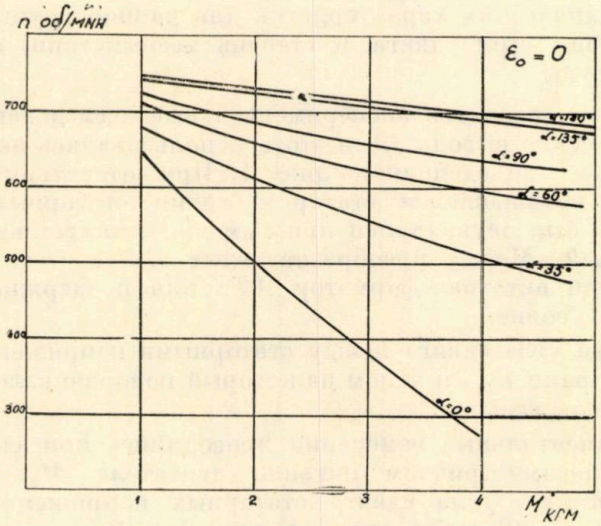


Рис. 2

теристики тем круче, чем болше угол сдвига. Однако, при питании напряжениями с малой степению несимметрии, крутизна характеристик растет при уменьшении угла сдвига. С увеличением степени несимметрии напряжений крутизна механических характеристик полученых

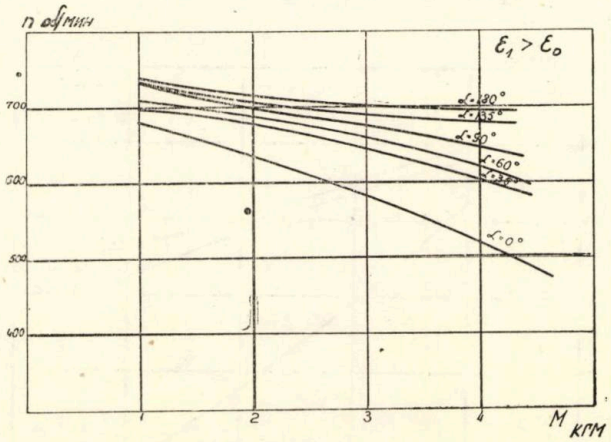


Рис. 3

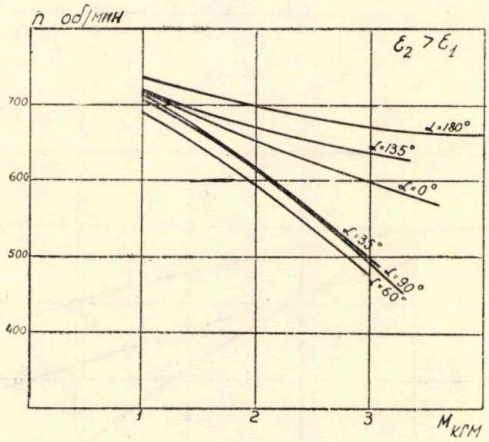


Рис. 4

при малых углах сдвига, легко уменьшается, в то время как для углах сдвига 60° ... 90° сильно уменьшается, что ведет к расширению диапазона скоростей.

Опыты показали, как следует из рис. 2 ... 4, что номинальная скорость данной групы двигателей изменяется на 83% при симметричном

питании обоих двигателей, на 33% при питании соответствующему малой степени несимметрии и на 58% при питании соответсвующему большой степени несимметрии.

б) Следует также что характеристика получаемая при $\alpha = 0°$ совпадает с осию ординат только при равных напряжений питания

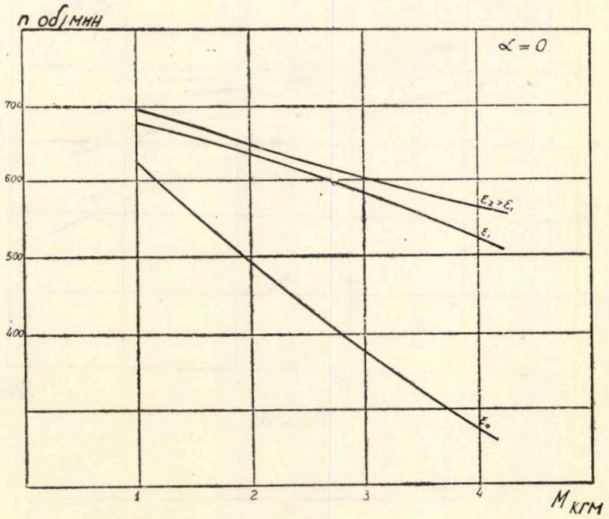


Рис. 5

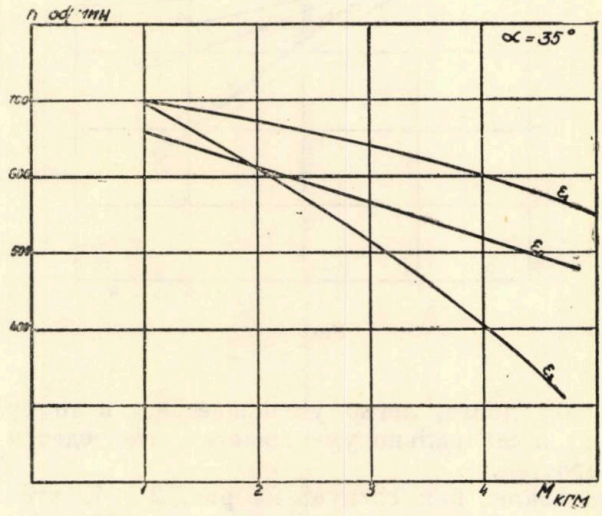


Рис. 6

обоих двигателей. Так как исследования относились к общему случаю : питание двигателей разными напряжениями, механическая характеристика соответствующая углу $\alpha = 0°$ (рис. 2) имеет некоторый наклон.

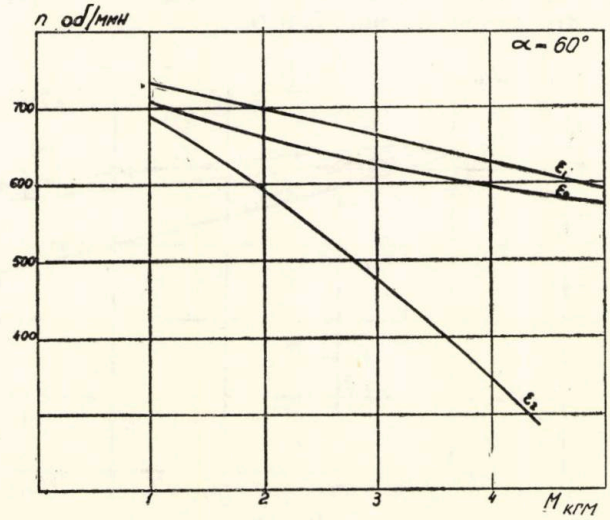


Рис. 7

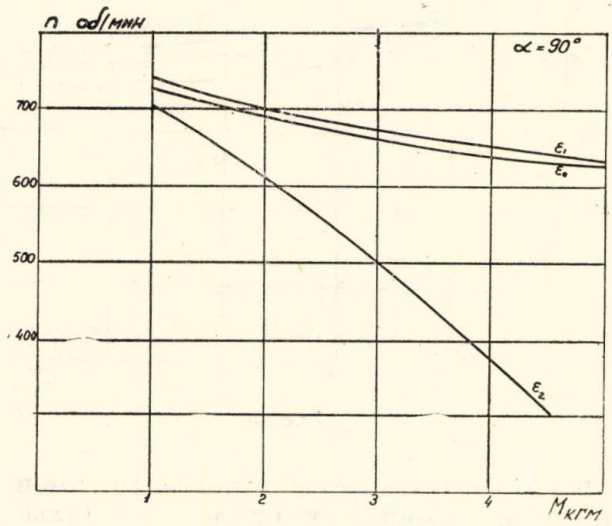


Рис. 8

в) Уменьшение крутизны механических характеристик при углах сдвига между 60° и 90°, при больших несимметрий напряжения, объясняется изменением знака момента двигателя M_2. Тем же самым объясняется крутизна механических характеристик при малых углах сдвига при несимметричном питании, того же порядка как при симметричном питании, как это видно на рис. 5 и 6.

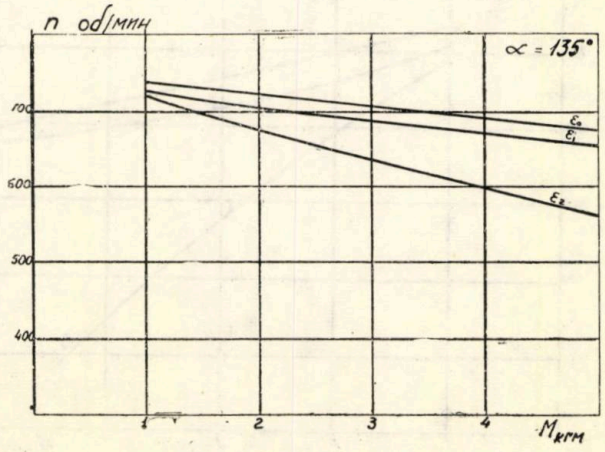


Рис. 9

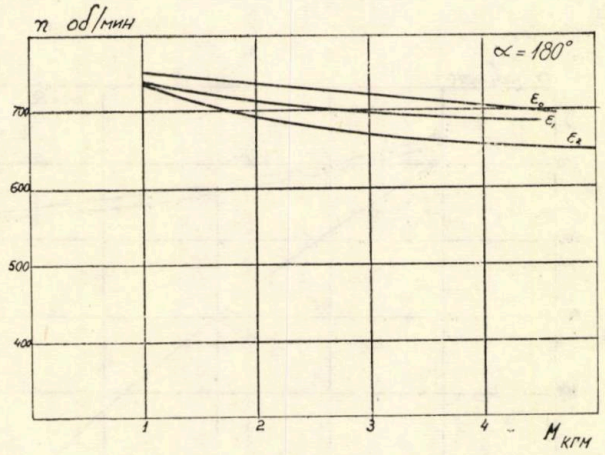


Рис. 10

г) Рис. 9 и 10 указывают то обстоятельство, что при углах сдвига более 90°, диапазон скоростей суживается тем больше, чем больше увеличивается угол сдвига. Так, например, диапазон скоростей полу-

чаемый при $\alpha = 180°$, при различных степеней несимметрии напряжений, не перевышает 10% от номинальной скорости.

Рис. 6 ... 8 показывают что при определенных углах сдвига (35° ... ... 90°), при несимметричном питании двигателя, полученые скорости могут быть больше или меньше чем те которые соответствуют симметричному питанию, в зависимости степени несимметрии.

Выводы

1. Экспериментальные исследования подтвердили в целом теоретические результаты установленые раньше [1].

2. Исследование групы состоящей из асинхронного двигателя и асинхронного двигателя с вращающимся статором, показали что возможно получить широкий диапазон регулирования скорости, но требует испольнение специальнного двигателя.

3. Можно избежать от испольнения специального двигателя путем применеиия определенного сдвига (постоянного) между двигателями и питанием одного из двигателей несимметричными напряжениями. В этом случае регулирование скорости достигается путем изменения степени несимметрии напряжений.

4. В последнем случае, экспериментальные исследования показали что самый широкий диапазон регулирование скорости получаются при постоянных углах сдвига от 60 до 90°.

5. Одним из недостатков указанного метода, является то обстоятельство что полный критический момент системы оказывается меньше номинального, то что ведет к не полному использованию двигателей. Однако этот метод регулирования скорости может быть использован с хорошими результагами для привода рабочих машин у которых момент сопротивления растет со скоростию, или же с квадратом скорости.

Поступила 18 января 1973 г.

Яский политехнический институт,
Лаборатория электропривода

ЛИТЕРАТУРА

1. Boţan N. V., Sebastian L., Balaban E., *Consideraţii asupra posibilităţilor de reglare a vitezei unui grup de două motoare asincrone funcţionînd coaxial.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVI (XX)**, *1—2* (1970).
2. Чиликин М. Г., *Общий курс электропривода.* ГЭИ, М., 1953.

CONSIDERAŢII EXPERIMENTALE ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE REGLARE A UNUI SISTEM DE ACŢIONARE CU GRUP MOTOR ASINCRON–MOTOR ASINCRON CU STATOR MOBIL

(Rezumat)

Se verifică concluziile obţinute pe cale teoretică [1] privind posibilităţile de reglare a vitezei cu un grup format din două motoare asincrone cuplate coaxial, dintre care unul cu stator mobil. Încercările sînt efectuate pentru diferite unghiuri de decalaj (constante) între statoarele celor două motoare, cît şi în condiţiile alimentării celor două motoare cu tensiuni simetrice şi a unuia dintre motoare cu tensiuni nesimetrice. Se trasează caracteristicile mecanice pentru diferite unghiuri de decalaj între statoare şi pentru diferite grade de nesimetrie a tensiunilor. Concluziile experimentale verifică în întregime concluziile teoretice anterioare [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.313.39; 621.313.3

POSIBILITĂȚI DE UTILIZARE A AUTODINEI ÎN ACȚIONĂRILE ELECTRICE CU MAȘINI DE CURENT ALTERNATIV *)

DE

CORNELIU HUȚANU și N. V. BOȚAN

1. Introducere

Robustețea, simplitatea și lipsa colectorului au impus folosirea motoarelor asincrone în acționările electrice și în special în ultimul timp prin asocierea cu instalații convertizoare de frecvență. Motorul asincron cu rotorul în scurtcircuit este cel mai robust și economic din seria motoarelor asincrone însă prezintă dezavantajele cunoscute: reglaj dificil de viteză în comparație cu motoarele de c.c., consum important de energie reactivă, precum și probleme de stabilitate legate de existența cuplului critic de răsturnare. Cu toate acestea celelalte avantaje l-au impus din ce în ce mai mult și în acționările cu grupuri de mașini, grupurile convertizor de frecvență—motor asincron în scurtcircuit fiind în plină ascendență datorită proprietăților de reglaj comparabile cu cele ale grupului W a r d - L e o n a r d.

Motorul asincron își poate păstra parametrii optimi pentru diferite regimuri de funcționare dacă se păstrează condițiile electromagnetice nominale prin menținerea constantă a fluxului. Relația dintre parametrii electrici și magnetici permite obținerea condiției ce trebuie realizată de sistemul de alimentare a motorului asincron:

$$\Phi_m = \frac{k_\Phi V_1}{f}, \tag{1}$$

adică o menținere constantă a raportului tensiune—frecvență. În acest mod se realizează menținerea constantă și a unui parametru esențial pentru acționările electrice — cuplul de răsturnare:

$$M_k = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_1^2}{\omega_0 (X_1 + X_2')} = k_m \left(\frac{V_1}{f}\right)^2 = \frac{k_m}{k_\Phi} \Phi_m^2, \tag{2}$$

*) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 2—4 iulie 1970.

unde : V_1 este valoarea efectivă a tensiunii alternative pe fază, ω_0 — pulsația tensiunii de alimentare, X_1, X'_2 — reactanțele înfășurării statorice respectiv rotorice raportată la stator, k_m, k_Φ — constante de proporționalitate.

Prin însăși construcția sa sau asociată cu dispozitive corespunzătoare autodina poate fi folosită și pentru reglarea motoarelor asincrone cu rotorul în scurtcircuit, conferindu-i proprietăți deosebite. Dacă cu ajutorul unei instalații adecvate, asociată autodinei, se asigură o convertire a c. c. în c. a., de amplitudine și frecvență corespunzătoare, dependente de valoarea tensiunii continue și al căror raport să se păstreze constant pentru întreaga gamă de reglaj a autodinei, se poate asigura funcționarea unui motor asincron la parametrii săi nominali. Deci dacă între tensiunea continuă a autodinei și valoarea efectivă a tensiunii alternative a instalației convertizoare există relația :

$$V_1 = k_u U, \tag{3}$$

k_u fiind o constantă de proporționalitate, și de asemenea dacă tensiunea continuă și frecvența tensiunii alternative a instalației de convertire satisfac relația :

$$f = k_f U, \tag{4}$$

k_f fiind de asemenea o constantă de proporționalitate, atunci se poate asigura tot timpul motorului asincron un flux de excitație constant :

$$\Phi_m = k_\Phi \frac{V_1}{f} = k_\Phi \frac{k_u}{k_f} = \text{const.} \tag{5}$$

Astfel de dispozitive de convertire se pot realiza cu mașini electrice rotative, elemente ionice sau semiconductoare comandabile. În cele ce urmează se prezintă două astfel de instalații a căror utilitate pentru scopul propus este imediată.

2. Instalații autodină—convertizor c.c./c.a. pentru alimentarea motoarelor asincrone

2.1. Instalații cu elemente semiconductoare comandabile

Avînd avantajele recunoscute ale elementelor statice, dispozitivele de convertire a c.c. în c.a. pe bază de tiristoare au căpătat în ultimul timp o utilizare foarte largă. În acest sens a apărut o mare varietate de tipuri constructive de invertoare a căror tensiune și frecvență pot fi comandate după voie [3], [5]. Evitînd o inutilă rememorare a acestora se vor reaminti proprietățile acelora care pot fi utilizate în scopul propus și anume avînd circuit intermediar de c.c. reglabil. La aceste dispozitive

valoarea efectivă a tensiunii alternative este direct proporțională cu valoarea tensiunii continue ce alimentează invertorul, asigurînd condiția (3). De asemenea, frecvența tensiunii alternative a invertorului este strict determinată de frecvența impulsurilor de aprindere a tiristoarelor, obținute de obicei de la un convertor tensiune continuă—frecvență. Dacă dispozitivul de comandă al tiristoarelor este alimentat cu o tensiune proporțională cu tensiunea autodinei, atunci este îndeplinită și condiția (4).

2.2. Instalație cu mașini rotative

Dacă în locul convertizorului static descris în § **2.1** se folosește o comutatrice funcționînd în regim de ondulor sau chiar o autodină funcționînd ca invertor (fig. 1) se obțin aceleași proprietăți ca și în cazul instalației precedente cu elemente statice. În această schemă mașina comutatoare este alimentată pe partea de c.c. de la autodină, funcționînd deci ca un motor de c.c. cu excitație derivație sau independentă (după cum este conectată), pe partea de c.a. funcționînd ca generator de c.a., cu valoarea tensiunii și frecvenței dependente de valoarea tensiunii continue a autodinei.

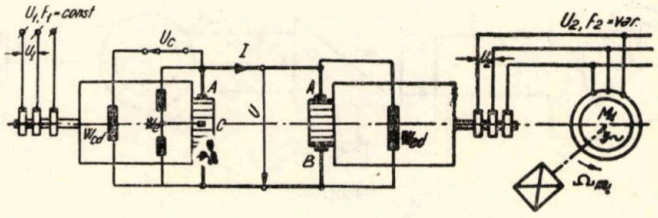


Fig. 1

Dacă alimentarea înfășurării de excitație a autodinei se realizează de la o sursă separată, schimbarea sensului de rotație a motoarelor asincrone se realizează simplu, prin inversarea sensului tensiunii de comandă, U_c. În acest caz schimbîndu-se sensul de rotație al invertorului se va modifica succesiunea fazelor, deci și sensul de rotație al motoarelor asincrone. De asemenea recuperarea de energie, în cazul funcționării ca generator a motoarelor asincrone, se poate realiza la orice viteză, circulația puterii făcîndu-se simplu în ambele sensuri.

În cazul cînd invertorul este realizat cu elemente semiconductoare, atît recuperarea cît și reversarea de sens de mers necesită construcții suplimentare suficient de complexe.

Dezavantajul evident al acestei scheme constă în necesitatea utilizării a încă unei mașini rotative cu colector, cu neajunsurile ce decurg de aici.

3. Posibilitățile ce le oferă alimentarea uni motor asincron de la un grup autodină—convertizor

Pentru a stabili proprietățile pe care le conferă un astfel de sistem unui motor asincron pe care-l alimentează, se vor considera cîteva situații distincte, de cea mai mare importanță pentru acționările electrice, considerînd pentru simplitate cazul cînd instalația este realizată cu elemente statice.

4.1. Obținerea caracteristicilor mecanice de diferite forme

a) *Caracteristică mecanică rigidă*

Dacă autodina care alimentează invertorul își reglează tensiunea la borne după legea $U = U_c$ atunci, la o alegere corespunzătoare a constantei k_f se poate realiza condiția (5), motorul asincron cu rotorul în scurtcircuit alimentat de la această instalație (fig. 2) funcționează pe caracteristici mecanice rigide. Într-adevăr, considerînd domeniul util de funcționare a motorului asincron ($0 < s < s_k$), caracteristica mecanică este descrisă cu o bună aproximație de relația (formula K l o s s):

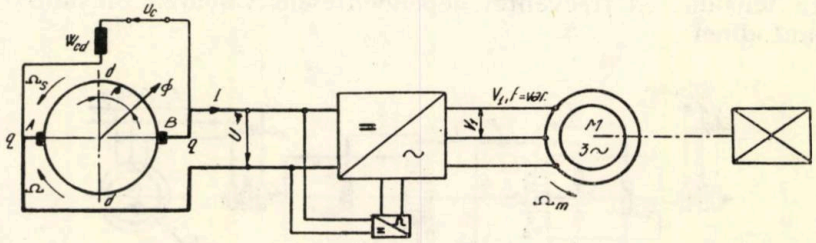


Fig. 2

$$s_m = \frac{s_k}{2M_k} M,$$

sau ținînd cont de expresia alunecării

$$\Omega_m = \Omega_0 - \frac{\Delta\Omega_k}{2M_k} M_r, \tag{6}$$

unde: s_k este alunecarea critică, $\Delta\Omega_k = \Omega_0 - \Omega_k$ — căderea de viteză corespunzătoare cuplului critic, M_r — cuplul rezistent, reprezentînd o dreaptă înclinată în raport cu axa cuplurilor.

Avînd în vedere că $\Omega_0 = 2\pi f/p$ și ținînd cont de (4), relația (6) devine

$$\Omega_m = K_f U_c - \frac{\Delta\Omega_k}{2M_k} M_r,$$

unde $K_f = 2\pi k_f/p$, iar p reprezintă numărul de perechi de poli ai motorului asincron.

Micșorînd valoarea tensiunii de comandă a autodinei se micșorează proporțional tensiunea și frecvența de alimentare a motorului asincron, obținîndu-se o familie de caracteristici mecanice reprezentînd drepte paralele, deoarece conform cu relațiile (2) și (5) $M_k = \text{const.}$, precum și $\Delta\Omega_k = \Omega_0 s_k = \frac{2\pi_f}{p} \cdot \frac{R'_2}{X_1 + X'_2} = \text{const.}$ În realitate, pentru valori reduse ale tensiunii de comandă, deci pentru frecvențe joase, rezistența înfășurării statorice, care în primă aproximație a fost neglijată în relația (2), devine comparabilă cu valoarea reactanțelor, cuplul critic micșorîndu-se. Cînd este necesar, acest dezavantaj poate fi eliminat folosind o legătură inversă după fluxul motorului asincron, prin intermediul unui traductor de flux [3], [5].

Dacă sistemul este prevăzut cu o posibilitate de schimbare a succesiunii fazelor se obțin caracteristici simetrice pentru ambele sensuri de rotație.

b) *Caracteristică mecanică tip excavator*.

Neglijînd pierderile și ținînd cont că valoarea curentului de magnetizare a motorului asincron se păstrează aproximativ constantă, se poate considera că valoarea curentului absorbit de motor de la instalația de convertire, deci de la autodină, este proporțională cu valoarea sarcinii la arbore :

$$M_m = K_i I, \tag{7}$$

K_i fiind o constantă de proporționalitate. Pe de altă parte, cu o bună aproximație (eroarea nu depășește 1,5...5%), se poate considera că

$$\Omega_m \cong \Omega_0 = \frac{2\pi}{p} f. \tag{8}$$

Dacă autodina regulatoare de tensiune din fig. 2 este înlocuită cu o autodină care-și reglează curentul continuu după legea (fig. 3) :

$$w_a I = \frac{w_{cd}}{a_c R_c} U_d, \tag{9}$$

atunci pentru sistemul autodină—convertizor—motor de c.c. se poate scrie sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} I = \dfrac{U_d}{a_c R_c} \cdot \dfrac{w_{cd}}{w_d}, \quad U_d^2 + U^2 = c_1^2 U_1^2, \\ \Omega_m = \dfrac{2\pi}{p} k_f U, \quad M_r = K_t I, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\left(\frac{w_d}{w_{cd}} \cdot \frac{a_c R_c}{K_t} M_r\right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi} \cdot \frac{\Omega_m}{k_f}\right)^2 = c_1^2 U_1^2$$

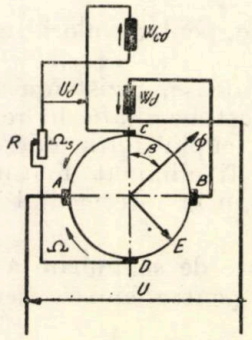


Fig. 3

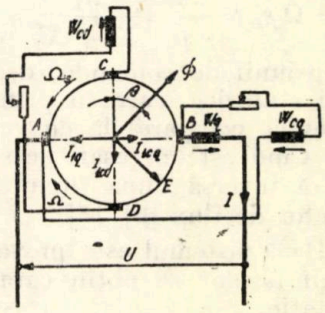


Fig. 4

și în definitiv

$$\left(\frac{M_r}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_m}{b}\right)^2 = 1, \tag{10}$$

care reprezintă ecuația unei elipse, unde

$$a = \frac{K_t}{a_c R_c} \cdot \frac{w_{cd}}{w_d} \quad \text{și} \quad b = \frac{2\pi}{p} k_f c_1 U_1 .$$

c) *Caracteristică mecanică suplă*

Considerînd că autodina din fig. 2 are înfășurarea de comandă conectată ca în fig. 4, cînd ea își reglează parametrii de ieșire după legea [1], [2]:

$$UI = \frac{w_{cd}}{a_c R_c} \cdot \frac{E_1^2}{w_q} = \text{const.}, \tag{11}$$

comportarea sistemului autodină—motor asincron în scurtcircuit în regim staționar este descrisă de ecuațiile:

$$UI = K, \quad \Omega_m = \frac{2\pi}{p} k_f U, \quad M_r = K_t I$$

sau

$$M_r\Omega_m = \frac{2\pi}{p} k_f K K_i = \text{const.}, \tag{12}$$

ce reprezintă ecuaţia unei hiperbole echilatere.

3.2. Reglajul vitezei şi cuplului motoarelor asincrone cu rotorul în scurtcircuit

a) *Modificarea vitezei de rotaţie*

Folosind schema din fig. 2 se poate obţine o modificare continuă a vitezei motorului asincron prin schimbarea tensiunii de comandă a autodinei. Într-adevăr, ţinînd cont de (8), pentru $\Phi_m = \text{const.}$, legea de reglaj a sistemului devine de forma :

$$\Omega_m = k_f \frac{2\pi}{p} U_c. \tag{13}$$

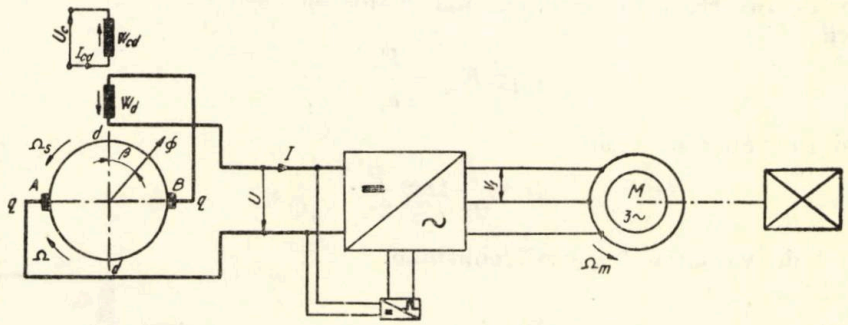


Fig. 5

De asemenea, se poate realiza o modificare a vitezei motorului numai prin variaţia frecvenţei dispozitivului de comandă al invertorului pentru cazul convertizorului static sau prin curentul de excitaţie al convertizorului rotativ. În acest caz fluxul nemai fiind menţinut constant apar dezavantajele cunoscute care conduc la o utilizare incompletă a motorului în întreaga gamă de reglaj.

b) *Reglajul cuplului*

Cu ajutorul schemei din fig. 5 se poate realiza modificarea cuplului dezvoltat de motorul asincron precum şi menţinerea acestuia la valoarea dorită. În această schemă autodina îşi reglează curentul continuu după legea [1] ,[2] :

$$w_d I = \frac{w_{cd}}{a_c R_c} U_c. \tag{14}$$

Ţinînd cont de (7) legea de reglaj a sistemului considerat va fi:

$$M_m = \frac{K_i}{a_c R_c} \cdot \frac{w_{cd}}{w_d} U_c, \tag{15}$$

care pune în evidenţă o dependenţă liniară a cuplului dezvoltat de motor, de valoarea tensiunii de comandă a autodinei.

4. Folosirea autodinei în regim de invertor pentru alimentarea motoarelor de curent alternativ

Dacă autodina este alimentată prin periile principale de la o sursă de c.c., înfăşurarea de excitaţie fiind conectată astfel încît să acţioneze după axa longitudinală, va funcţiona pe partea de c.c. ca un motor cu excitaţie derivaţie, la inele obţinîndu-se o funcţionare de comutatrice în regim de invertor. În acest caz atît valoarea efectivă a tensiunii alternative

$$U_1 \cong E_{1q} = \frac{E_q}{c_1} = \frac{U}{c_1} \tag{16}$$

cît şi frecvenţa acesteia

$$f = \frac{p}{2\pi} \Omega \cong \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{U}{K_e \Phi}, \tag{17}$$

depind de valoarea tensiunii continue.

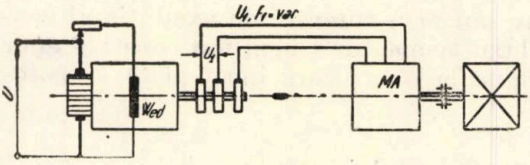


Fig. 6

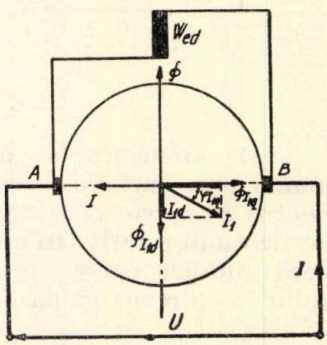


Fig. 7

Un motor asincron alimentat de la această maşină va avea deci viteza şi cuplul critic determinate de tensiunea continuă (fig. 6). Modificînd valoarea tensiunii continue variază atît U_1 cît şi f. Prezentînd

caracteristicile motorului derivație, cu scăderea tensiunii continue frecvența va scădea mai repede decît valoarea tensiunii alternative, fapt ce va face ca la frecvențe mici să se compenseze micșorarea fluxului motorului asincron datorată căderilor active de tensiune. Se poate obține astfel o funcționare a motorului asincron la cuplu critic practic constant. Dezavantajul esențial al acestui regim îl reprezintă funcționarea relativ instabilă a invertorului cu sarcini inductive mari. Dacă se conectează la mașina funcționînd în gol o sarcină inductivă, apare o demagnetizare bruscă (fig. 7) și o tendință de ambalare, viteza invertorului putînd atinge viteze periculoase.

De menționat că în acest caz autodina își pierde proprietățile de reglaj pe care le are în regim de redresor comandat.

5. Concluzii

1. Se demonstrează că prin intermediul unor instalații corespunzătoare de convertire a c.c. în c.a. poate fi extinsă gama posibilităților de utilizare a autodinei în acționările electrice, transferînd proprietățile sale nu numai motoarelor de c.c. ci și motoarelor asincrone.

2. Prin utilizarea unor instalații autodină—convertizor c.c./c.a. se demonstrează posibilitatea obținerii de la motorul asincron și a altor caracteristici mecanice decît cea rigidă, și anume a caracteristicilor tip excavator și suple. Aceste posibilități permit înlocuirea unor motoare speciale (de exemplu tip repulsie) sau instalații deosebit de complicate pentru reglajul tensiunii și frecvenței de alimentare. Prin intermediul autodinei se obțin automat caracteristicile menționate numai prin simpla modificare a conexiunilor înfășurărilor statorice ale autodinei.

3. Pe lîngă asocierea cu instalații corespunzătoare de convertire c.c./c.a. care permit utilizarea completă a proprietăților ce le are autodina, ea însăși poate fi folosită în alimentarea nemijlocită a motoarelor de inducție prin folosirea regimului de invertor.

Primită la 9 septembrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice și automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Benedikt O., *Die neue elektrische Maschine „Autodyne"*. Budapest, 1957.
2. Boțan N. V., Hutanu C., *On some Posibilities of Using the Autodyne for Electric Drives*. Bul. Inst. polit. Iași, XV (XIX) *3—4* (1969).
3. Gereke E., *Metode noi de comandă a puterii cu tiristoare*. A.M.C., *9*, 71 (1967).
4. Richter R., *Mașini electrice*, (trad. din l. germană). Vol. I și II, Ed. Tehn., Buc., 1957, 1959.
4. Tunsoiu Gh., *Acționări și automatizări electrice*. EDP, Buc., 1967.

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АВТОДИНА В ЭЛЕКТРОПРИВОДАХ С ДВИГАТЕЛЯМИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

(Резюме)

В статье доказывается что, посредству соответствующих конверторных сооружений постоянного тока на переменный, возможно разширение предела возможностей использования автодина и при электроприводах с асинхронными двигателями. В начале доказывается возможность получения, по мимо твердых механических характеристик, и характеристик другой формы (экскаваторных или же мягких), при питании того же асинхронного короткозамкнутого дьигателя от групы составленной из автодина и конвертора постоянного на переменный ток. Также указывается возможность регулирования скорости и момента этих двигателей. В заключении указывается возможность использования автодина в инверторном режиме для питания асинхронных дбигателей.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.3.016.33; 621-526

ÎNLĂTURAREA AUTOOSCILAŢIILOR SERVOMECANISMELOR DE TIP RELEU PRIN ALEGEREA CORESPUNZĂTOARE A RAPORTULUI DE TRANSMISIE AL REDUCTORULUI*)

DE

LEOPOLD SEBASTIAN şi CORNELIU BOŢAN

1. Introducere

Într-o serie de lucrări precedente [1]...[3], s-a analizat problema determinării raportului de transmisie optim al reductorului la servomecanismele de poziţie liniare. În lucrarea de faţă se studiază problema determinării corecte a raportului de transmisie al reductorului unui servomecanism de poziţie neliniar, de tip releu.

După cum se ştie, la astfel de servomecanisme există posibilitatea apariţiei unor autooscilaţii, care sînt, bineînţeles, nedorite în funcţionare. Înlăturarea acestora se obţine în mod obişnuit fie prin mărirea zonei de insensibilitate a releului, ceea ce duce la creşterea erorii staţionare a sistemului, fie prin introducerea unor corecţii suplimentare [4], care complică însă construcţia servomecanismului.

În lucrarea de faţă se arată că atunci cînd releul, servomotorul şi traductoarele de poziţie au anumite caracteristici invariante, autooscilaţiile pot fi înlăturate prin alegerea corespunzătoare a raportului de transmisie al reductorului. Acest fapt se studiază atît în cazul servomecanismelor neliniare de cea mai simplă construcţie, cît şi al servomecanismelor de tip releu cu reacţie negativă după viteză.

2. Tratarea problemei

Fie un servomecanism cu schema bloc reprezentată în fig. 1, în care blocul N reprezintă elementul neliniar (releul), celelalte blocuri fiind liniare şi anume : blocurile cu funcţia de transfer $Y_i(s) = K_i = \text{const.}$

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică jubiliară „60 ani de învăţămînt electrotehnic în Iaşi", 21—23 decembrie 1972.

reprezintă traductoarele de poziție, blocul cu funcția de transfer $Y_m(s)$ reprezintă motorul, iar blocul cu funcția de transfer $Y_r(s) = 1/i$ reprezintă, reductorul, $i = \theta_m/\theta_e$ fiind raportul de transmisie al acestuia, iar blocul Y_v corespunde reacției respective după viteză. Pe figură s-au notat, de asemenea, tensiunea U de alimentare a motorului și tensiunile U_i, U_r, U_v de intrare în elementele comparatoare precum și deplasările unghiulare θ_i, θ_m și θ_e pentru axul de intrare, axul motorului și respectiv axul de ieșire.

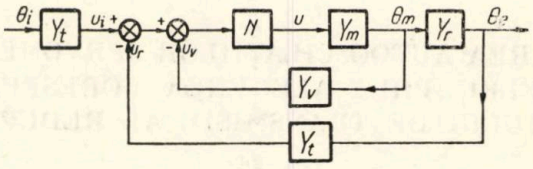


Fig. 1

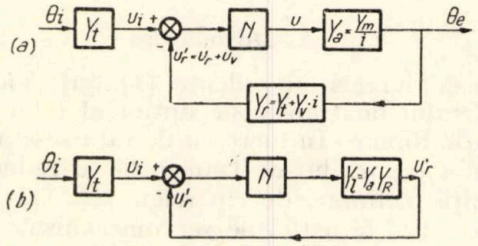


Fig. 2

De la schema din fig. 1, operînd o serie de simplificări evidente, se ajunge la schemele bloc din fig. 2 *a* și *b* în care

$$(1)\quad \begin{cases} Y_a(s) = Y_m(s)\, Y_r(s) = \dfrac{Y_m(s)}{i}, \\ Y_R(s) = Y_t(s) + Y_v(s)\, \dfrac{1}{Y_r(s)} = Y_t(s) + Y_v(s) i, \quad Y_l(s) = Y_a(s)\, Y_R(s). \end{cases}$$

Reacția de viteză fiind de tip derivativ, rezultă că

$$(2)\qquad Y_v(s) = K_v s,$$

unde K_v este constanta traductorului respectiv (de exemplu a tahogeneratorului). Ca atare

$$(3)\qquad Y_R(s) = K_t + K_v i s.$$

Considerînd că motorul sistemului este de curent continuu, cu excitație separată, comandat pe indus, și utilizînd transformata Laplace, pentru blocul Y_a, care cuprinde motorul și reductorul, se pot scrie următoarele ecuații:

$$(4) \qquad \begin{cases} iC_m\, I(s) = (J_m i^2 + J_s)\,\theta_e(s)\, s^2 + M_r(s), \\ U(s) = RI(s) + LsI(s) + C_e i\theta_e(s)\, s, \end{cases}$$

în care $I(s)$ reprezintă imaginea curentului rotoric, $U(s)$ — imaginea tensiunii de alimentare a motorului, $M_r(s)$ — imaginea cuplului rezistent la axul motorului, J_m și J_s — momentul de inerție al motorului și respectiv al obiectivului comandat, R și L — rezistența și inductanța rotorului, iar C_m și C_e — constantele servomotorului.

La scrierea ecuației de echilibru a cuplurilor, considerate la axul de ieșire, s-a neglijat momentul de inerție al reductorului. Acesta poate fi luat în considerare prin multiplicarea lui J_m cu un coeficient, urmînd ca după alegerea definitivă a reductorului să se verifice valoarea coeficientului respectiv. Inițial acesta se poate lua cuprins între 1,1 și 1,4 [3]. Eliminînd din expresiile (4) pe $I(s)$, se deduce

$$(5) \qquad \frac{1}{C_e i}\, U(s) = \left[\frac{L\,(J_m i^2 + J_s)}{C_e C_m i^2}\, s^3 + \frac{R\,(J_m i^2 + J_s)}{C_e C_m i^2}\, s^2 + s \right] \theta_e(s) + \left(\frac{L}{C_e C_m i^2}\, s + \frac{R}{C_e C_m i^2} \right) M_r(s).$$

Introducînd notațiile:

$$\tau_e = \frac{L}{R}, \quad \tau_{mM} = \frac{RJ_m}{C_e C_m}, \quad \tau_s = \frac{RJ_s}{C_e C_m},$$

se obține

$$(7) \qquad \frac{1}{C_e i}\, U(s) = \left[\tau_e \left(\tau_{mM} + \frac{\tau_s}{i^2} \right) s^2 + \left(\tau_{mM} + \frac{\tau_s}{i^2} \right) s + 1 \right] s\theta_e(s) + \left(\frac{L}{C_e C_m i^2}\, s + \frac{R}{C_e C_m i^2} \right) M_r(s).$$

Neglijînd cuplul rezistent la axul de ieșire, se poate deduce funcția de transfer a blocului alcătuit din motor și reductor:

$$(8) \qquad Y_a(s) = \frac{\theta_e(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_e i}}{s\left[\tau_e \left(\tau_{mM} + \dfrac{\tau_s}{i^2} \right) s^2 + \left(\tau_{mM} + \dfrac{\tau_s}{i^2} \right) s + 1 \right]}.$$

În baza relațiilor (1), (2) și (8) rezultă următoarea expresie a funcției de transfer a părții liniare a sistemului

$$(9) \qquad Y_l(s) = Y_a(s)\, Y_R(s) = \frac{\dfrac{1}{C_e\, i}(K_t + K_v i s)}{s\left[\tau_e\left(\tau_{mM} + \dfrac{\tau_s}{i^2}\right)s^2 + \left(\tau_{mM} + \dfrac{\tau_s}{i^2}\right)s + 1\right]}.$$

În consecință factorul de amplificare complex este dat de expresia

$$(10) \qquad Y_l(j\omega) = \frac{-\dfrac{1}{C_e}\omega\left[\left(\tau_{mM}+\dfrac{\tau_s}{i^2}\right)\left(\dfrac{K_T}{i}+K_v\tau_e\omega^2\right)-K_v\right]+j\dfrac{1}{C_e}\left[\omega^2\left(\tau_{mM}+\dfrac{\tau_s}{i^2}\right)\left(\dfrac{K_T}{i}\tau_e-K_v\right)-\dfrac{K_T}{i}\right]}{\omega\left[1-\tau_e\left(\tau_{mM}+\dfrac{\tau_s}{i^2}\right)\omega^2\right]^2+\omega^3\left(\tau_{mM}+\dfrac{\tau_s}{i^2}\right)^2}.$$

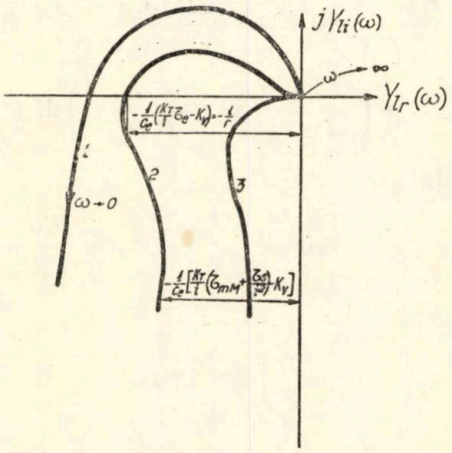


Fig. 3

Reprezentarea locurilor de transfer, pentru diferite situații, este redată în fig. 3. Curba *1* din această figură reprezintă locul de transfer pentru cazul sistemului fără reacție după viteză ($K_v = 0$), în timp ce locurile de transfer *2* și *3* corespund cazului $K_v \neq 0$. Se observă că dacă

$$(11) \qquad \frac{K_T}{i}\tau_e - K_v \leqslant 0$$

atunci locul de transfer se află situat integral în cadranul III (curba *3*) iar dacă relația (11) nu este îndeplinită locul de transfer are o porțiune și în cadranul II (curba *2*). Dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{K_T}{i}\left(\tau_{mM}+\frac{\tau_s}{i^2}\right)-K_v \geqslant 0 \tag{12}$$

locul de transfer se află situat doar în semiplanul complex stîng, iar în caz contrar, pentru frecvențe mici, un arc al său se găsește în cadranul IV.

Avînd stabilit locul de transfer al părții liniare, pentru diferite situații, se poate trece la studiul condițiilor de apariție a autooscilațiilor pentru sistemul de urmărire considerat și reprezentat în final prin schema bloc din fig. 2 *b*. În acest scop, în cele ce urmează, se face uz de metoda liniarizării armonice.

2.1. Releu ideal

Pentru început se consideră că releul sistemului este ideal, avînd caracteristica reprezentată în fig. 4. Pentru o astfel de neliniaritate funcția de descriere are expresia

$$N(A)=\frac{4U_M}{\pi A}, \tag{13}$$

în care A este amplitudinea semnalului de la intrarea elementului neliniar (a releului), iar U_m — valoarea constantă a tensiunii rețelei de alimentare a motorului. Pentru determinarea condițiilor de existență a autooscilațiilor se folosește în cele ce urmează metoda expusă în [5]. În acest scop se reprezintă într-un plan real, în cadranul II (fig. 5), graficul

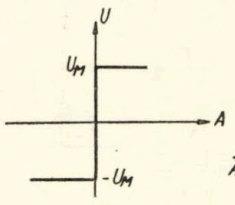


Fig. 4

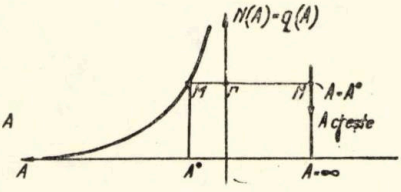


Fig. 5

funcției $q(A)=\mathcal{R}e\,[N(A)]$. În cadranul I se construiește o dreaptă perpendiculară pe abscisă, gradată în valori ale amplitudinii A. Fie ω^0 acea valoare a pulsației pentru care partea imaginară a factorului de amplificare complex al părții liniare devine nulă. La această pulsație valoarea părții reale devine

$$Y_{lr}(\omega^0)=-\frac{1}{\Gamma}.$$

În fig. 5 se reprezintă în ordonată punctul în care $N(A) = q(A) = \Gamma$ și se construiește prin el o paralelă la axa absciselor. Amplitudinea $A = A^0$, corespunzătoare punctului de intersecție M, respectiv N, constituie amplitudinea autooscilațiilor de la intrarea elementului neliniar. Pulsația lor este $\omega = \omega^0$. Revenind la fig. 3 se constată că în cazul locurilor de transfer *1* și *2*, Γ are o valoare bine determinată și că deci întotdeauna în aceste cazuri există autooscilații. În cazul locului de transfer *3* (fig. 3), $\Gamma = \infty$. Ca atare, în baza fig. 5 se deduce că autooscilațiile respective au $A = 0$, pulsația lor fiind infinit de mare ; deci propriu-zis nu există autooscilații. Rezultă deci că în mod practic sistemul respectiv nu va prezenta autooscilații dacă este îndeplinită condiția (11), adică dacă se alege un reductor cu raportul de transmisie

$$i > \frac{K_T \tau_e}{K_v}. \tag{14}$$

2.2. Releu cu zonă de insensibilitate

Releul prezintă zonă de insensibilitate, având caracteristica statică reprezentată în fig. 6. Expresia funcției de descriere este dată de relația

$$N(A) = q(A) = \begin{cases} \dfrac{4U_m}{\pi A}\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{4A^2}} & \text{pentru } A > \dfrac{z}{2}, \\ 0 & \text{pentru } A < \dfrac{z}{2}. \end{cases} \tag{15}$$

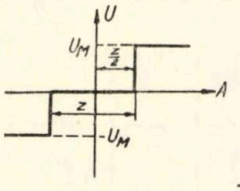


Fig. 6

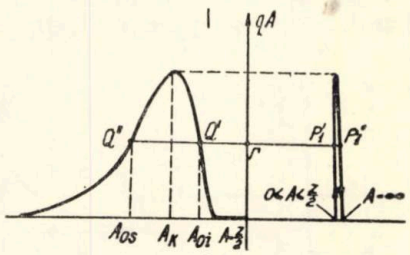


Fig. 7

Reprezentarea grafică respectivă este dată în fig. 7. Pe figură a mai fost trasată, în cadranul I, o dreaptă cu două sensuri de parcurgere, gradată în valori ale amplitudinii A, și o paralelă la axa absciselor situată la distanța Γ față de aceasta. Mărimea Γ este dată de relația

$$\Gamma = \frac{C_e}{\dfrac{K_T}{i}\tau_e - K_v}. \tag{16}$$

Această relație rezultă din condiția

$$\frac{1}{\Gamma} = |Y_{tr}(\omega^0)|\,, \tag{17}$$

unde ω^0 reprezintă pulsația pentru care locul de transfer respectiv intersectează semiaxa reală negativă. Intersecțiile dreptei $N(A) = \Gamma$ cu dreapta dublă din cadranul I, gradată în valori A, sau cu curba $N(A)$, constituie punctele care caracterizează autooscilațiile (P_1', P_1'', respectiv Q', Q''). Conform celor arătate în [5], numai punctul Q'' corespunde unor oscilații stabile, cu parametrii $A = A_s^0$, $\omega = \omega^0$.

Evident, pentru evitarea autooscilațiilor trebuie îndeplinită condiția

$$\Gamma > q(A)_{\max} = q(A_K). \tag{18}$$

Ținînd cont că $A_K = \sqrt{2}\, z/2$, deci $N(A)_{\max} = 4U_M/\pi z$, rezultă că autooscilații nu vor exista dacă

$$\frac{C_e}{\frac{K_T}{i}\tau_e - K_v} > \frac{4U_M}{\pi z}\,, \tag{19}$$

respectiv dacă se alege un reductor cu raportul de transmisie

$$i > \frac{K_r\,\tau_e}{C_e\,\frac{\pi z}{4U_M} + K_v}\,. \tag{20}$$

Pe baza acestui rezultat se pot face următoarele observații :

1° Reacția de viteză face posibilă inexistența apariției autooscilațiilor la valori ale raportului de transmisie mai mici decît în lipsa ei.

2° Cu cît reacția de viteză este mai puternică (K_v mai mare), cu atît valoarea raportului de transmisie al reductorului, la care se evită autooscilațiile, este mai mică, deci construcția acestuia este mai economică.

3° Autooscilațiile pot fi evitate și în lipsa reacției după viteză, deci și la servomecanisme foarte simple din punct de vedere constructiv, dacă

$$i > \frac{K_T\tau_e}{C_e} \cdot \frac{4U_M}{\pi z}\,. \tag{21}$$

4° Comparînd relațiile (10) și (14), ultima constituind un caz particular al celei dintîi, se ajunge la concluzia că valoarea raportului de transmisie al reductorului, care face imposibilă existența autooscilațiilor, este mai mică în cazul releului cu zonă de insensibilitate față de cazul releului

ideal și evident cu atît mai mică cu cît această zonă este mai mare. Cum însă de aceasta depinde precizia sistemului în regim staționar, este de dorit ca valoarea ei să fie cît mai mică.

2.3. Releu cu zonă de insensibilitate și histerezis

Acest caz (fig. 8) nu poate fi studiat prin metoda folosită în situațiile precedente întrucît aceasta nu este aplicabilă neliniarităților descrise de funcții de descriere complexe. De aceea condiția de lipsă a autooscilațiilor se va deduce din condiția de inexistență a punctelor de intersecție dintre locul de transfer al părții liniare și locul de descriere invers negativ al părții neliniare a sistemului. Expresia funcției de descriere a neliniarității considerate este

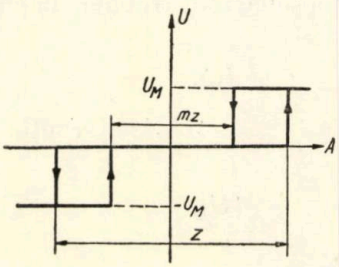


Fig. 8

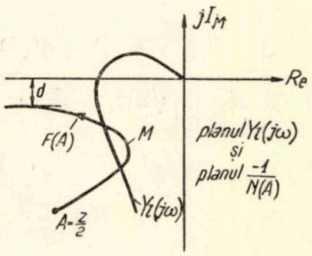


Fig. 9

$$(22) \qquad N(A) = \frac{2U_M}{\pi A}\left[(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) - j\,(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)\right],$$

în care $\alpha_1 = \arcsin(z/2A)$, $\alpha_2 = \arcsin(mz/2A)$.

Funcția de descriere inversă negativă este dată de expresia

$$(23) \qquad F(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4U_M}\cdot\frac{(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + j\,(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + 1}.$$

Locul corespunzător ultimei funcții este reprezentat în fig. 9. Pentru $A = z/2$ partea reală și respectiv cea imaginară devin

$$F_r = -\frac{\pi z}{8U_M}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}, \qquad F_i = -\frac{\pi z}{8U_M}.$$

Pentru $A \to \infty$ locul de descriere invers negativ tinde asimptotic la o paralelă la axa absciselor situate sub aceasta la distanța $d=\pi z(1-m):16U_M$. Intersecțiile dintre locul de transfer de forma cea mai generală (curba *2*, fig. 3) și locul de descriere invers negativ se deduc foarte greu pe cale analitică, întrucît apar ecuații de grad superior. Determinarea pe cale analitică a acestor puncte este îngreunată și de faptul că pot exista cazuri în care punctul M (în care partea reală a locului de descriere invers negativ este maximă) să nu fie înconjurat de locul de transfer al părții liniare, dar cu toate acestea să existe puncte de intersecție între cele două locuri. Rezolvarea problemei se poate face în acest caz numai pe cale grafică, prin încercări succesive. Anume, se trasează cîteva locuri de transfer pentru diferite valori ale raportului de transmisie. Valorile corespunzătoare locurilor care nu intersectează locul de descriere invers negativ asigură inexistența autooscilațiilor.

3. Concluzii

Din cele arătate pînă acum se desprind următoarele concluzii:

1° Există posibilitatea evitării autooscilațiilor servomecanismelor de tip releu prin alegerea corectă a raportului de transmisie. În general pentru evitarea autooscilațiilor raportul de transmisie al reductorului trebuie să fie mai mare decît o anumită valoare limită.

2° În cazul servomecanismelor cu relee fără histerezis se pot formula condiții analitice care să limiteze valoarea minimă a mărimii i.

3° În cazul cînd releele prezintă histerezis aceste condiții se găsesc pe cale grafică, așa cum s-a arătat în cuprinsul lucrării.

4° În condițiile asigurării inexistenței autooscilațiilor, prezența reacției după viteză, sau a altei corecții după derivată, permite alegerea unei valori mai mici a raportului de transmisie decît în lipsa ei.

Primită la 10 aprilie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări și automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Sebastian L., *Considerații teoretice privind alegerea raportului de transmisie al reductorului dintre motorul de execuție și elementul de măsură la un sistem de urmărire.* Bul. Inst. polit. Iași, IX (XIII), *1–2* (1963).
1. Sebastian L., Oláh I., Lucanu M., *Considérations sur le choix du rapport de transmission du réducteur d'un servomécanisme à servomoteur asynchrone biphasé.* Automatisme, *11* (1969).
3. Sebastian L., Boțan C., *Asupra alegerii raportului de transmisie al reductoarelor servomecanismelor de poziție.* Bul Inst. polit. Iași, s. III, XVIII (XXII) *1–2* (1972).
4. Hammond P. H., *Feedback Theory and its Applications.* London.
5. Sebastian L., *Contribution aux méthodes actuelles de détermination des oscillations libres des systèmes bouclés non-linéaires comportant une seule non-linéarité.* Automatisme, *4* (1973).

CHOIX DU RAPPORT DE TRANSMISSION DU REDUCTEUR D'UN SERVOMÉCANISME À RELAIS EN VUE D'ASSURER L'ÉLIMINATION DES OSCILLATIONS LIBRES

(Résumé)

En considérant le servomécanisme représenté par le schéma bloc de la fig. 1, où le relais N peut avoir des différentes caractéristiques (fig. 4, 6 et 8), on établit les conditions qui évitent les oscillations libres. Ces conditions sont formulées par voie analytique, (14) et (20), pour les premiers deux cas (fig. 4 et 6) et graphique, lorsque la caractéristique du relais est celle de la fig. 8.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. C. 621.317.39; 531.781

A TRANSDUCER CAPABLE OF TENSING THE DIRECTION OF MECHANICAL LINEAR MOVEMENT

BY

IOSIF OLÁH and RODICA OLÁH

1. Introduction

In a previous paper [1] the theoretical possibilities were discussed for the utilization of a linear movement transducer, which, if compared to other types of known transducers, was also capable to supply a large power output signal.

After presenting the functioning principle of the transducer consisting in controlling the transducer by means of its magnetic reluctance, a few experimental results were given, which revealed the high performance qualities of the new transducer.

Starting from frequently encountered practical considerations, i. e. the need for such transducers to also sense the direction of movement, the purpose of this paper is to discuss aspects concerning the amelioration of the previous transducer model.

2. Description of the Transducer

Two major methods are given for obtaining static characteristics of type $I_s = F(x)$, where the polarity of the output signal depends on the direction x in which the mobile armature moves.

One such possibility is to connect an external constant voltage supply $U_\sim$ in phase opposition to the output signal U_s of the transducer (Fig. 1 *a*). If the value of $U_\sim$ is so chosen as to make the zero signal $U_e = U_s - U_\sim = 0$ correspond to that particular position of the mobile armature for which the functionning point is situated in the middle of the linear portion of the static characteristic $I_s = F(x)$ (s. Figs. 6...9 from [1]), then a displacement to right or left of the mobile armature M will generate a static characteristic like that in Fig. 1 *b*. We shall name this position of the mobile armature, a concordance position or zero position.

In this case the transducer output will yield an a.c. signal whose phase will depend on the sense in which the mobile armature moves from the concordance position.

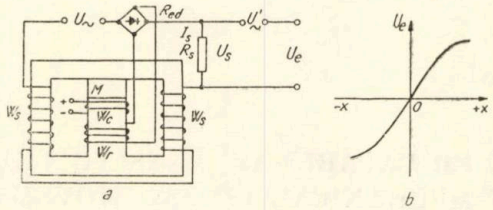


Fig. 1

It is obvious that, if a d.c. voltage output is needed from the transducer then the a.c. voltage $U_\sim$ will be replaced by an appropriate d.c. voltage so that in the end obtained output signal will exhibit both amplitude and polarity dependent on the value and sense of the armature. movement.

The second possibility consists in using two identical bridge-connected transducers [2], [3]. Fig. 2 shows the connection diagrams for the two transducers where the output voltage appears across the load resistor R_s, and Fig. 3 shows the prototyp on which experimental test were carried out.

The device consists in the two transducers *I* and *II*, comprising the following parts : the non ferromagnetic part *1* rigidly secured to the object under test, the mobile ferromagnetic armatures *2*, the ferromagnetic circuits *3*, the work windings *4*, the d.c. magnetization and feedback windings *5*, the quides *6* for the mobile armatures, the chassis *7* and the feedback rectifiers 8.

If both mobile armatures of the two transducers are rigidly secured to part *1*, identical positions of the fixed cores *3* will generate at the output, across load resistor R_s, a zero voltage because the two opposing curents cancel. We can call this in a similar manner a concordance or zero position. By moving part *1* away from this position we can obtain due to the coupling of the two transducers a static characteristic like the one in Fig. 1 *b*. The difference between this and the previous case is that the sensibility is doubled, thus making for the disadvantage of having to use two identical transducers.

It is worth mentioning that, because the input to these transducers (relative deplacement x) influences directly on the d.c. flux via the magnetic reluctance R_m [1], their behaviour is noninertial, if a purely active impedance is assumed.

3. Experimental Results

We shall now describe a series of experiments made on a prototype built (Figs. 2 and 3 and the characteristics of [1]) with two identical transducers.

This experimental study had the aim of obtaining the static curves $I_s = F(x)$, in the following conditions :

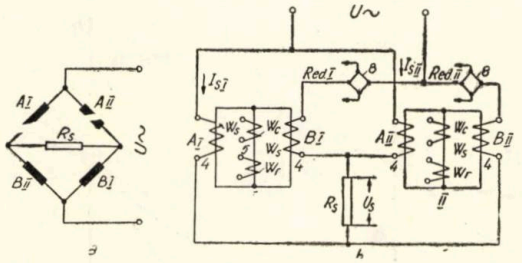


Fig. 2

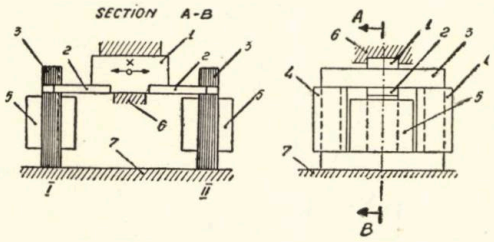


Fig. 3

a) Figs. 4 and 5 describe those transducers without external magnetic feedback for which the variable parameters are the load resistance, the supply voltage and the number of d.c. magnetization ampereturns.

b) Figs. 7 and 8 describe the transducers functionning with external magnetic feedback and using the above mentioned parameters.

In order to being into better evidence the features of the device, figs. 6 and 9 show respectively the curves of maximum sensibility S_i [mA/mm] and S_u [V/mm], depending on the magnetization ampereturns, for different values of the supply voltage and for two values of the load resistance.

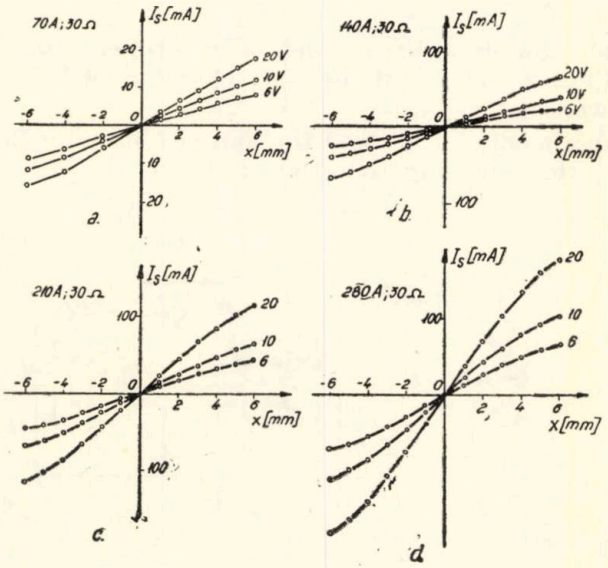

70A;30Ω
I_S[mA]
20V
10V
6V
x[mm]
a.
140A;30Ω
b.
210A;30Ω
c.
280A;30Ω
d.

Fig. 4

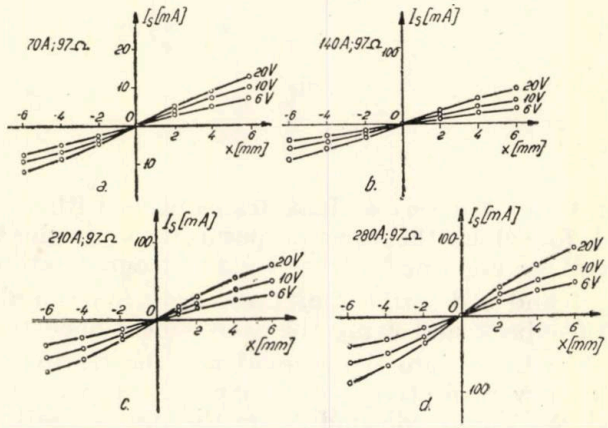

70A;97Ω
I_S[mA]
20V
10V
6V
x[mm]
a.
140A;97Ω
b.
210A;97Ω
c.
280A;97Ω
d.

Fig. 5

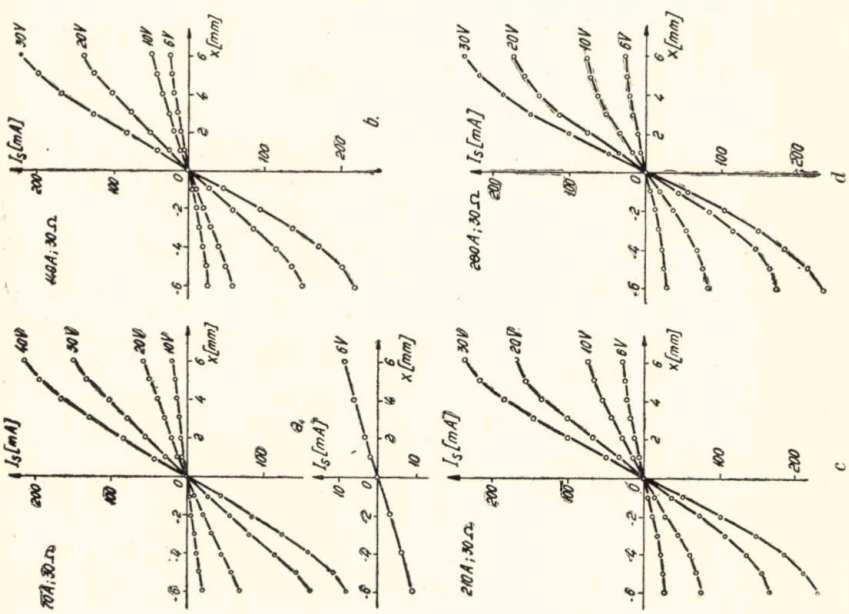


Fig. 7

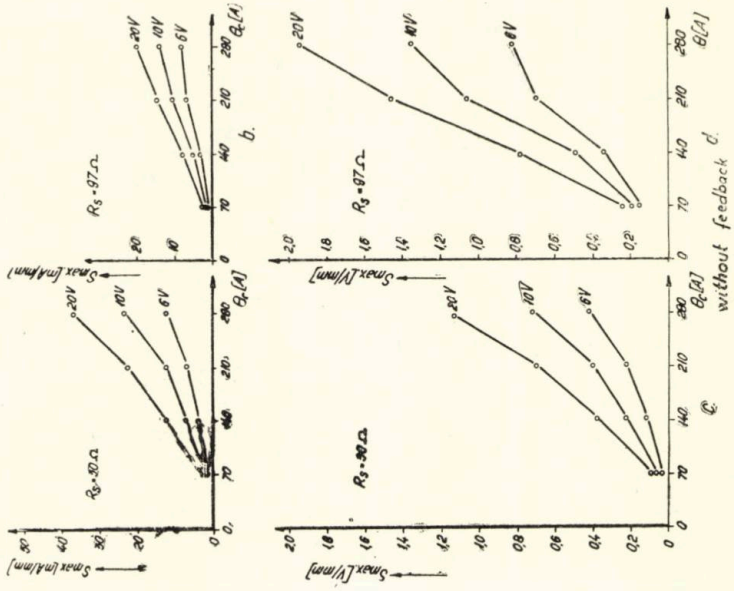
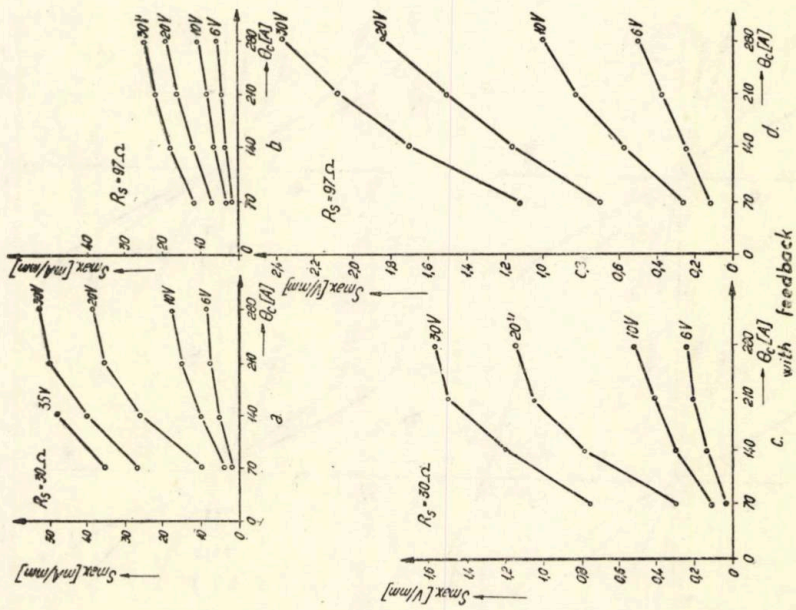
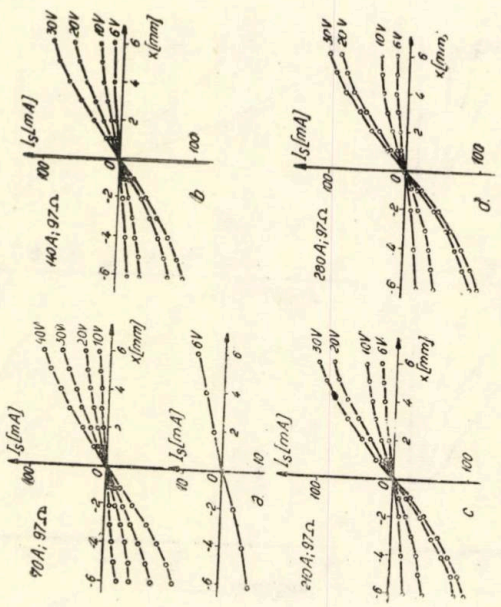


Fig. 6



$R_S = 30\,\Omega$
$R_S = 97\,\Omega$
S_{max} [mA/mm]
S_{max} [V/mm]
θ_c [A]
a
b
c
d
with feedback

Fig. 9



70A; 97Ω
140A; 97Ω
210A; 97Ω
280A; 97Ω
I_S [mA]
x [mm]
a
b
c
d

Fig. 8

4. Conclusions

1. A brief analysis of the obtained characteristics confirms the possibility of constructing linear movement transducers whose output is capable to shift phase or polarity together with the direction of movement as to a reference position called concordance or zero position.

2. A very important conclusion is that these static characteristics show a very good linearity in the $\pm$ 4 mm range, and that the range can be extended by adopting an adequate prototype.

3. The influence of growing d.c. magnetization ampereturns on sensibility is seen to be considerable. Thus, the transducer without external magnetic feedback for $R_s = 30\,\Omega$ and $U = 20$ V shows a maximum sensibility S_u approx. 12.5 times greater if θ_c is increased four times. Due to feedback ampereturns, this influence is less important in the case of external magnetic feedback.

4. The voltage supply also has an appreciable influence on the maximum sensibility, especially with low values of the magnetization ampereturns and if external magnetic feedback is used. Thus, if the supply voltage is varied from 6 to 30 V for $\theta_c = 70$ A and $R_s = 30\,\Omega$, the maximum sensibility increases from 0.04 V/mm to 0.76 V/mm, i.e. 19 times greater for a fivefold increase of the supply voltage. For greater values of the magnetization ampereturns θ_c, this influence is reduced.

5. An increase of the load resistance will being about a decrease of the maximum sensibility in mA/mm and an increase of the maximum sensibility in V/mm.

6. The performance of the external magnetic feedback transducers is much superior to that of transducers lacking it, both in maximum sensibility S_i and S_u. Since the addition of external magnetic feedback does not imply major difficulties and since the achieved increase in maximum sensibility and decrease of d.c. magnetization ampereturns are sufficiently important, the choice of external magnetic feedback transducers is recommendable.

7. The results obtained with this type of transducer, related both to its linearity and sensibility, are comparable to those obtained at international level. Since this type of transducer was made normal transformer sheets, it is reasonable to anticipate greatly improved performances if magnetic materials of better quality are used.

8. The development of the practical applicability range for this type of transducer will make the object of future research.

Received, February 20, 1973

Polytehnic Institute, Jassy,
Department of Electrical
Drives and Automation
and
Department of Electroenergetics

REFERENCES

1. Oláh I., Oláh R., *About a New Type of Linear Movement Transducer.* Bul. Inst. polit. Iaşi, s. III, XVII (XXI), *3—4* (1971).
2. Юревуч Е. И., *Электромагнитные устроиства автоматики.* Изд. Энергия, М.-Л., 1964.
3. Аранович Б. И., Шамря Б. В., *Электромагнитные устроиства автоматики.* Изд. Энергия, М., 1965.
4. Geyger W. A., *Dispozitive magnetice neliniare*, (translated from English). Ed. Tehn., Buc., 1968.
4. Roots W. K., *Capteurs de déplacements et de forces.* Automatisme, XIV, *4*, *11*, *12*, (1969); Ibid., XV, *3* (1970).

TRADUCTOR DE DEPLASARE LINIARĂ SENSIBIL LA SENSUL DEPLASĂRII

(Rezumat)

În [1] s-a arătat că printr-o alegere corespunzătoare a circuitului magnetic al unui transductor, la care reluctanţa depinde de o deplasare liniară, acesta poate deveni traductor de deplasare liniară.

Pornind de la faptul că adesea traductoarele de deplasare liniară utilizate în practică trebuie să fie sensibile şi la sensul deplasării, în prezentul articol s-a abordat aspectul îmbunătăţirii performanţelor tipului de traductor prezentat în [1], în sensul celor de mai sus. În acest scop sînt prezentate două posibilităţi de realizare, urmate de o serie de încercări experimentale efectuate pe un prototip realizat conform fig. 2 şi 3.

Încercările experimentale confirmă posibilitatea realizării unor traductoare de deplasare liniară, pe baza transductorului, a căror mărime de ieşire depinde de sensul deplasării liniare precum şi performanţele deosebit de bune, atît în ceea ce priveşte sensibilitatea cît şi liniaritatea caracteristicilor statice obţinute.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. K. 621.313.323; 621.317.373

VORRICHTUNG ZUR WINKELMESSUNG BEI SYNCHRONMOTOREN *)

VON

MIRCEA DIACONESCU, I. ŢIŢARIU und GH. SAVITESCU

1. Allgemeine Betrachtungen

Der Synchronmotor hat sich für elektrische Antriebe dank einiger Vorteile durchgesetzt, die er im Vergleiche mit andern Motorentypen bietet, und von denen wir anführen: a) Betrieb unter konstanter Drehzahl, b) erhöhter Leistungskoeffizient, c) relativ hohes Überladungsvermögen.

Gleichzeitig werfen die elektrischen Antriebsvorrichtungen mittels Synchronmotoren zahlreiche Probleme besonders im Zusammenhang mit ihrem Verhalten bei dynamischem Betrieb auf. Die Lösung dieser Probleme bedingt in den meisten Fällen die Kenntnis des Innenwinkels θ, wie auch der Art der Veränderung dieses Winkels, da der Winkel θ dies Betriebsart des Synchronmotors am besten kennzeichnet.

Die Entwicklung und Erprobung einer Winkelmessvorrichtung bildet den Gegenstand der vorgelegten Arbeit.

2. Beschreibung und Betriebsweise der Anlage

Das Gerät besteht aus zwei Hauptelementen: ein Aggregat zur Erzeugung von Impulsen und ein Phasenmessaggregat.

2.1. Der Impulserzeuger

Der Impulserzeuger ist das Hauptelement der Einrichtung. Er liefert am Ausgang Impulse, deren Phase von der Lage der Achse des Rotorenfeldes also auch von der Größe des Winkels θ abhängt, welcher als

*) Mitgeteilt an der wissenschafftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 2.—4. Juli 1970.

Winkel zwischen der Achse des Rotorenfeldes und der Achse des Statorenfeldes definiert ist [2].

Dieser Generator muß einige Bedingungen erfüllen und zwar: a) große Genauigkeit, b) kleine Zeitkonstante, c) genügende Stärke der Signale, d) Einfachheit und Betriebssicherheit.

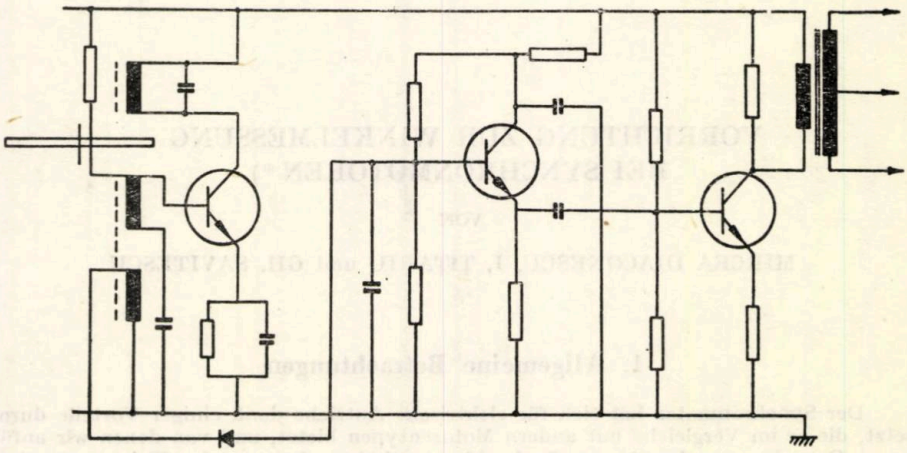


Abb. 1

Das Schema dieses Generators ist in Abb. 1 dargestellt. Er besteht aus einem Oszillator *LC*, dessen Stromkreis am Kollektor abgestimmt ist und arbeitet mit einer Frequenz von 200 KHz. Die am Grundkreis angelegte Reaktion wird von einer Spule abgenommen, welche magnetisch mit der des abgestimmten Kreislaufes gekuppelt ist. Zwischen beiden Spulen läuft eine Aluminiumscheibe um, mit einer der Anzahl der Polpaare des Motors gleichen Zahl von Paletten, die starr am Motorenrotor fixiert sind.

Solange zwischen den Oszillatorenspulen noch keine Metallpalette eingetreten ist, befindet sich der Oszillator in Schwingung. Sobald die Aluminiumpalette zwischen die Spulen tritt und so lange ihr Durchlauf dauert, ist der Oszillator wegen der Verluste, die an der Palette auftreten, blockiert. So erhält man in der Kupplungsspule Schwingungszüge des Trägers von 200 KHz, deren Amplitude mit einer Frequenz von 50 Hz moduliert ist (Abb. 2 *a*).

Dieses Signal wird detektiert (Abb. 2 *b*) und dann verstärkt. Der Endverstärker hat als Belastung einen Transformator, der gesättigt parallel zu einem Widerstand arbeitet. Man erhält so im Sekundärkreis des Transformators *Tr* Impulse von steiler Flanke wie in Abb. 2 *c*.

Es ist augenscheinlich, daß die Impulse in Abb. 2 *c* die Achsenlage des magnetischen Rotorfeldes in Bezug auf ein bestimmtes Verhältnis fixieren.

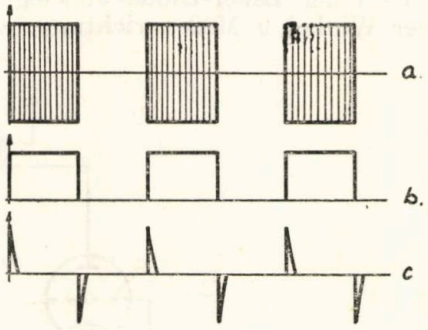


Abb. 2

Wenn man in Acht nimmt dass die Achsenlage des magnetischen Statorenfeldes durch die Speisespannung des Motors fixiert werden kann, dann ergibt sich, daß bei der Wahl dieser Spannung als Bezugsgröße die Phase der Impulse (Abb. 2 *c*) sein wird :

$$\Phi = \Phi_0 + \theta, \tag{1}$$

wobei Φ_0 eine konstante Größe vorstellt.

Wenn man die Spulenposition des Oszillators so regelt, daß beim idealen Leerlauf des Motors ($\theta = 0$) die beiden Impulse phasengleich sind dann ergibt sich :

$$\Phi = \Phi_0 = 0.$$

Infolge dieser Regelung ist in jedem Betriebsverhältnis :

$$\Phi = \theta.$$

2.2. Das Phasenmessaggregat

Dieses Aggregat soll den Winkel $\Phi = \theta$ messen. Prinzipiell kann man sich ihn wie in Abb. 3 vorstellen, wobei die Eintrittsgrößen sind : die Impulse X_{i1} vom Impulserzeuger und die Spannung X_{i2} zur Speisung einer der Motorenphasen ; die Austrittsgröße ist die Spannung oder der Stromm, $X_e = K\theta$.

In Abb. 4 ist die Schaltung dieses Aggregates in Einzelheiten wiedergegeben.

Die Impulse X_{i1} steuern zwei Thyratrone, die von der Spannung U mittels des Transformators Tr gespeist werden.

Die Leitungsdauer der Thyratrone hängt von der Phase der Steuer-Impulse *ab*. Die den Thyratronen angelegte Spannung hat die Form aus Abb. 5 *a*. Die Klemmenspannung des Lastwiderstande ist die aus Abb. 5 *c*.

Die Spannung ist einer Zener-Diode angelegt an deren Klemmen das Austrittssignal der Winkel θ Meßvorrichtung, wie in Abb. 5 *d* abgenommen wird.

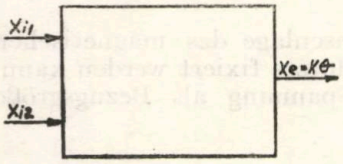


Abb. 3

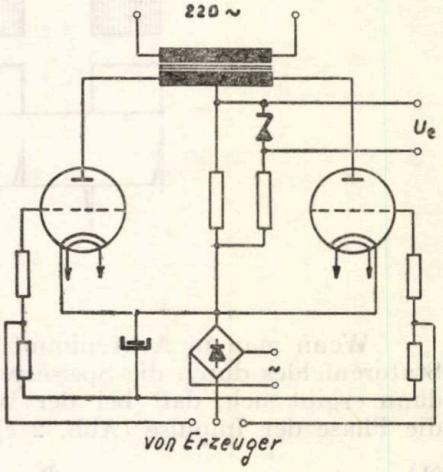


Abb. 4

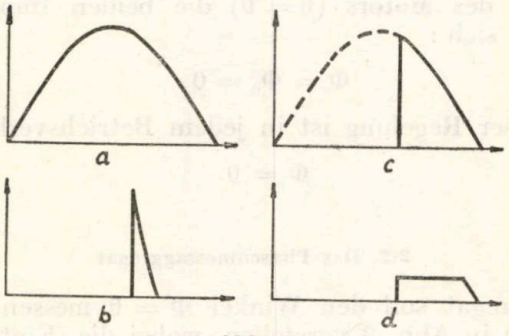
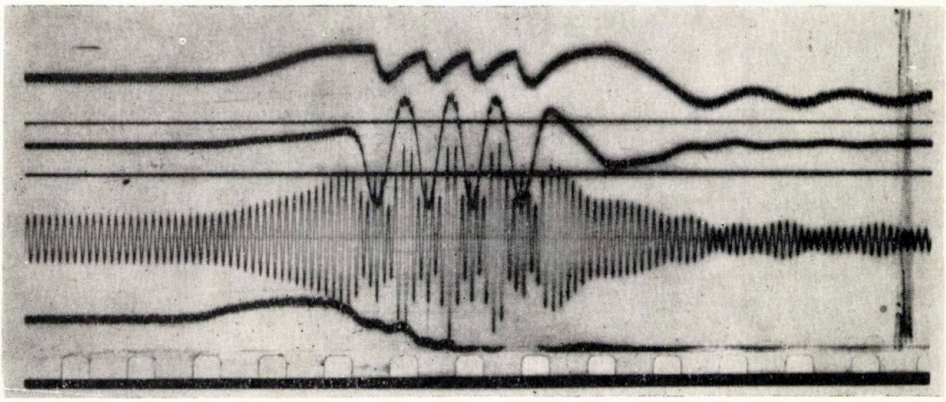
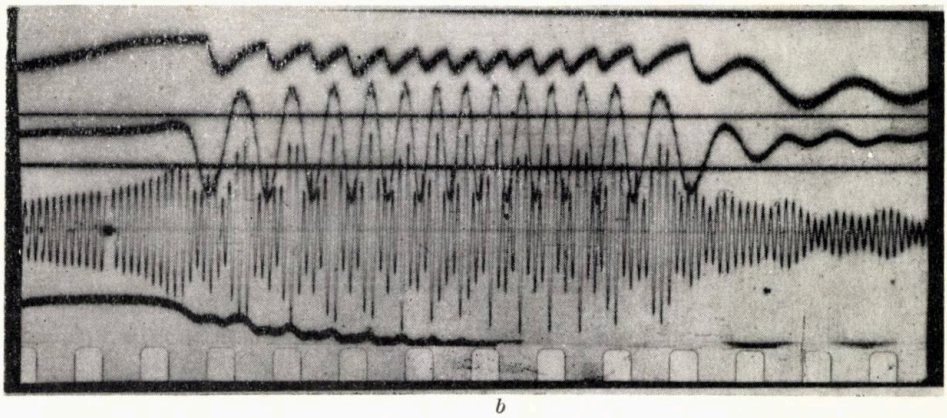


Abb. 5

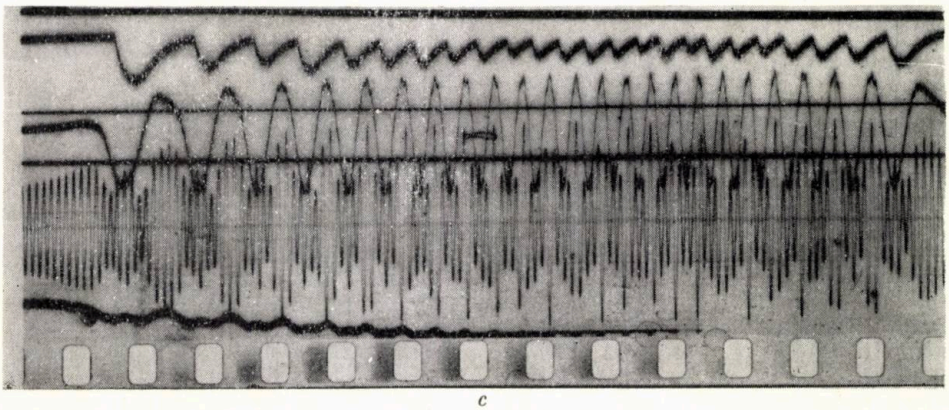
Wenn man in Betracht zieht, dass die Zener-Spannung ungefähr 3% der Anodenspannung des Thyratrons vorstellt, kann man aussagen, daß dieses Austrittssignal die Form eines Rechtecks von konstanter Höhe und einer Länge hat, welche gleich ist der Leitungsdauer des Thyratrons.



a



b



c

Abb. 6

Durch seine Schaltung als Integrierglied erhält man beim Austreten dieses Elementes eine Spannung, die auf dem Bildschirm eines kathodischen Oszillators veranschaulicht, bzw. in einen Messapparat (Mikroampermeter) eingeführt werden kann.

3. Versuchsergbnisse und Schlußfolgerungen

Die Eichung des Meßgerätes kann in zwei verschiedenen Lagen vorgenommen werden : a) die Synchronmaschine arbeitet in der Betriebsart eines Motors ; b) die Synchronmaschine arbeitet in der Betriebsart eines Generators.

Die experimentellen Proben wurden in der Motorenbetriebsart vorgenommen. In diesen Fall verläuft die Eichung in zwei Phasen : in der ersten Phase fixiert man den Zusatzwiderstand des an den Austritt des Integriergliedes eingeschalteten Mikroampermeters so wie für den Fall, wenn die Thyratrone permanent leiten (mit der Kathode verbundene Gitter) ; diese Lage entspricht einem Winkel von 0°, wenn das Mikroampermeter einen Höchstausschlag aufweist. Die so erhaltene Skala für das Mikroampermeter ist linear und kann direkt in Winkelwerten beziffert werden.

In der zweiten Phase schaltet man das Phasenmessgerät zusammen mit dem Nachweisgerät an den Austritt des Impulsgebers.

Man bringt den Synchronmotor auf idealen Leerlauf ($\theta = 0$) mit Hilfe einer Hilfsmaschine, wonach die Oszillatorspulen gegen die Motorenachse bis zum Höchstausschlag des Mikroampermeters gedreht werden. Derart wird die Vorrichtung geregelt und bei Aufladung des Motors zeigt sie den Winkel θ an.

Zum Studium dynamischer Betriebsweisen verwendet man einen Oszillographen, der parallel zum Mikroampermeter geschaltet wird.

Im Laboratorium wurde die entwickelte Vorrichtung besonders zum Studium dynamischer Betriebsweisen eines Synchronmotors verwendet, der mittels eines Gleichstromgenerators aufgeladen wurde. Es wurden eine Reihe von Größen oszillographiert, darunter auch der Winkel θ. Einige der erhalten Oszillogramme sind in Abb. 6 *a*, *b*, *c* wiedergegeben.

Auf den Oszillogrammen kann man in der Richtung von oben nach unten verfolgen : die Veränderung des Innenwinkels θ, die Veränderung des Anregungsstromes des Motors, die Veränderung des vom Motor absorbierten Stromes sowie die Veränderung des Stromes im Gleichstromgenerator.

Was das entwickelte Winkelmessgerät betrifft, kann man folgendes feststellen :

a) Das Gerät kann den Winkel sowohl im Dauerzustand, wie auch in dynamischem Betrieb meßen.

b) Die Messung ist mit einigen Fehlern Bereiche kleiner Winkel behaftet (diese Zone interessiert praktisch in den meisten Fällen nicht); die Fehler erscheinen infolge der Vernachlässigung der Reaktanz, die dem Streuungsstrom der Synchronmaschine entspricht, sowie einiger Ungenauigkeiten bei der Thyratronenzündung.

c) Das Gerät entspricht allen vorher erwähnten Bedingungen. Es hat daneben einen einfachen Aufbau und einen geringen Kostenpreis im Vergleiche mit ähnlichen Geräten.

d) Die Stärke der Austrittssignale ist genügend groß, so dass sie die Eintrittsgröße für selbsttätige Regler der Antriebsysteme mit Synchronmotoren vorstellen können.

Eingegangen am 17. Juli 1972

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Nuntzanwendungen der Elektrizität und Automatisierung

LITERATURVERZEICHNIS

1. Diaconescu M., Ţiţariu I., Savitescu Gh., *Contribuţii privind reglarea automată a excitaţiei motorului sincron după unghiul intern.* A II-a Conferinţă naţională a electricienilor, Buc., 1969.
2. Zărnescu H., *Utilizarea motorului sincron în acţionările electrice.* Ed. Tehn., Buc., 1967.

DISPOZITIV DE MĂSURĂ A UNGHIULUI INTERN LA MOTOARE SINCRONE

(Rezumat)

Se prezintă un dispozitiv pentru măsurarea unghiului intern la maşinile sincrone Aparatul foloseşte un traductor de unghi fără contacte alunecătoare, ceea ce constituie un avantaj în comparaţie cu alte sisteme de măsură cunoscute.

Se expun detalii constructive ale dispozitivului şi se prezintă o descriere a funcţionării acestuia. Se fac precizări referitoare la modul de reglare şi etalonare a aparatului ataşat unei maşini sincrone.

În final se prezintă o serie de oscilograme ce evidenţiază posibilităţile de folosire ale aparatului în studiul unor regimuri dinamice. Se fac precizări asupra performanţelor şi domeniilor de utilizare ale dispozitivului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—2, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D. C. 621.316.717; 621.313.223-9

STUDY OF THE ENERGETICS OF THE D.C. MOTOR STARTING PROCESS WITH THE HELP OF AN ANALOGUE COMPUTER

BY

ZAIRA MURGU

1. The determination of energy losses and actual nonproductive consumption in the case of different operations and different operating conditions of motors is of interest for energy economy.

In a previous paper [1], we have dealt with the energetics of the transient regimes in the high-power shunt-wound D.C. motor.

Relations for calculating energy losses and nonproductive consumption were determined with a view to establishing energy balances. It was found that at those periods lost power may be twice as high as the rated power of the motor.

In some cases, because of the existence of non-linearities, transient processes in the D.C. motor are described by non-linear differential equations which may be solved more simply by mathematical modelling with the help of electronic computers [2].

Moreover, on analogue diagrams of the D.C. motor, the influence of some parameters on transient magnitudes may be easily studied, resulting in the obtention of easily comparable families of curves.

Analyses may be carried out for concrete cases.

In what follows we shall discuss the energetics of the D.C. motor starting regime. Analyses were carried out for a shunt-wound motor (3 kW, 2,200 rev/min and 110 V).

To determine losses proportional to the speed, to the square of speed, to the square of current and to current itself, it was necesary to establish time variation curves of the speed and current in the starting period, as well as curves of the square of those magnitudes.

The influence of the variation of resistance, of charge and inertia on those magnitudes — and hence also on different losses in the starting period in the motor — was determined. Processes were analyzed on the analogue computer MEDA from the Computation Centre of the „Al. I. Cuza" University, Jassy.

The following cases were analyzed in turn : 1° the steady static torque, 2° the torque variable with the speed and 3° the torque variable with the square of speed.

2. The equations describing transient magnitudes during the starting process, in the case of the steady torque are :

$$(1)\quad \begin{cases} U = R_t I + L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + c_e n, \qquad c_m I = \dfrac{GD^2}{375}\cdot\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + M_s, \\ \sum\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \Delta p_{ex} + \Delta p_j = k_1 n^2 + k_2 I + k_3 I^2 + \Delta p_{cx_n} + 1{,}03\, n\, M_j, \end{cases}$$

where : U — feeding voltage, I — current in the induced circuit, n — rotational speed, GD^2 — flywheel moment, M_s — static torque at the motor shaft, $R_t = R + R_p$, R and L — resistance and inductivity of induced circuit, R_p — starting flux resistance,

$$c_e = \frac{10^{-8} pN\Phi}{60a} = k_e\Phi\,, \quad c_m = \frac{10^{-8} pN\Phi}{2\pi.\, 9{,}81a} = k_m\Phi,$$

Φ — air gap flux, Δp_1 — sum of gap and mechanical losses, Δp_2 — electric losses in slide contact, Δp_3 — sum of ohmic losses in induced circuit and in the supplementary ones, Δp_{ex} — ohmic losses in shunt excitation circuit, k_1 , k_2 , k_3 — constant coefficients whose significance is given in [1], Δp_j — starting losses, M_j — dynamic torque.

The constant parameters of the motor are : $U = 110$ V, $R_t = 1.28\ \Omega$, $L = 0.71 \times 10^{-3}$ H, $c_e = 0.046$ V min/rev, $c_m = 0.044$ kgm/A, $k_1 = 0.565 \times 10^{-4}$ kW min^2/rev^2, $k_2 = 2.06$ W/A, $k_3 = 1.5$ W/A^2, $GD^2/375 = 0.8 \times 10$ kgm

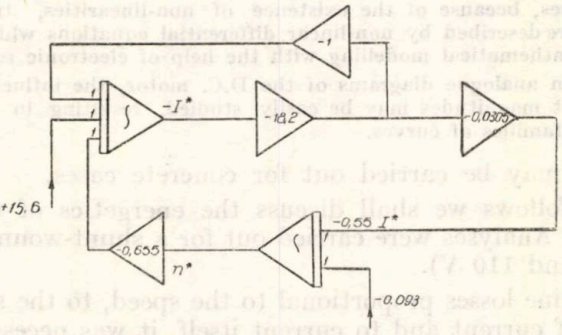


Fig. 1. — Block diagram in the case of the whole equation of the transient regim.

Following simple transformations, the first two equations were reduced to the following form, liable to modelling on the analogue computer :

$$(2)\qquad 5 = 0.21\, n^* + 5{,}82\, I^* + 0.32\,\frac{\mathrm{d}I^*}{\mathrm{d}t^*}, \quad 2.22 I^* = 4\,\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}t^*} + 0.375,$$

where :

$$n^* = 10^{-2}n,\ t^* = 10^3\,t,\ I^* = 10^{-2}\,I.$$

The block diagram for this system is given in Fig. 1.

Preliminary tests showed that, for the example under study, the transient electromagnetic phenomenon may be neglected.

We, therefore, dealt only with the transient electromechanical regime in the following. After some simple transformations, equations were brought to the following form fit for computer modelling :

$$\tilde{I} = 1.43 - 0.596\,\tilde{n},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}t} = 3.34\tilde{I} - 0.936 \tag{3}$$

where :

$$\tilde{I} = \frac{I}{60},\quad \tilde{n} = 10^{-3}n.$$

The block diagram corresponding to the analogue computer is given in Fig. 2 *a*. The diagram involves elements modelling the squares of n and I, so that the sum of losses in the motor, in the transient period, may be determined (Figs. 1 and 2).

Oscillograms obtained with this diagram for $-n$, $-I$, n^2 and I^2 are given in Fig. 3 *a*, *b* and *c*.

In these figures, oscillograms *1* are obtained for initial values of the parameters ; in oscillograms *2*, $M_s = 1.5$ kgm, in oscillograms *3*, $GD^2/375 = 1.6 \times 10^{-3}$ kgm^2, and in oscillograms *4*, $R_t = 2.56\ \Omega$.

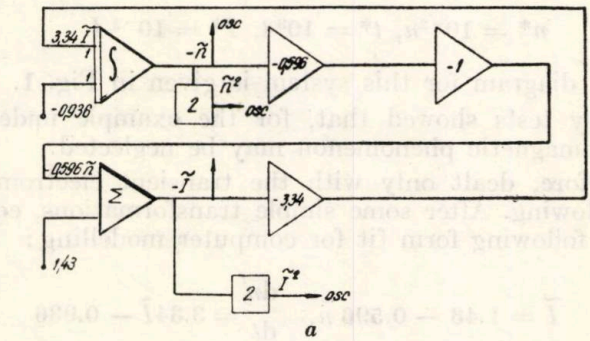
It is seen that in proportion as inertia or the static torque increases the transient time and the instantaneous values of Δp_2 and Δp_3 also increase, while the instantaneous value of Δp_1 decreases and the initial shock of losses remains constant. Where resistance increases, the initial shock of the sum of losses decreases.

Fig. 4 *a* shows the way in which the instantaneous value of the sum of losses in the motor is influenced by the value of the starting resistance, as it was stated in [1] (Figs. 3 and 4).

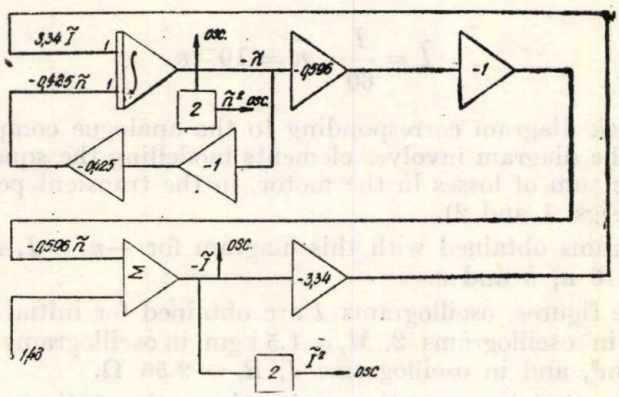
3. In the case of a static torque, variable with the speed, equations describing the process and modelled are

$$\tilde{I} = 1.43 - 0.596\,\tilde{n},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}t} = 3.34\,\tilde{I} - 0.425\,n. \tag{4}$$

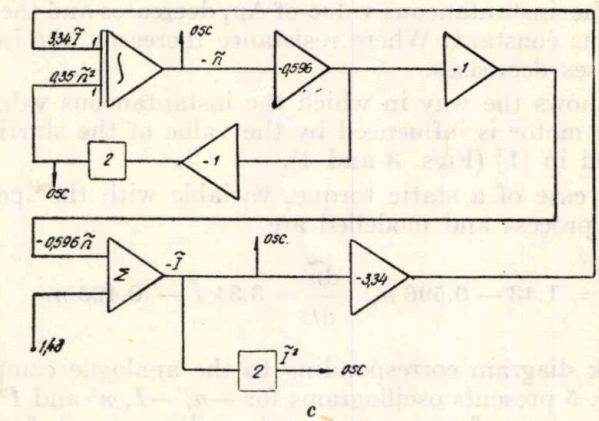
The block diagram corresponding to the analogue computer is given in Fig. 2 *b*. Fig. 5 presents oscillograms for $-n$, $-I$, n^2 and I^2. Oscillograms *1* show initial values of parameters and oscillograms *2*, for $R_t = 2.56\ \Omega$. In this case, also, the decrease of the initial shock of the sum of losses with



a



b



c

Fig. 2. — Bloc diagram of the mechanical transient regime.

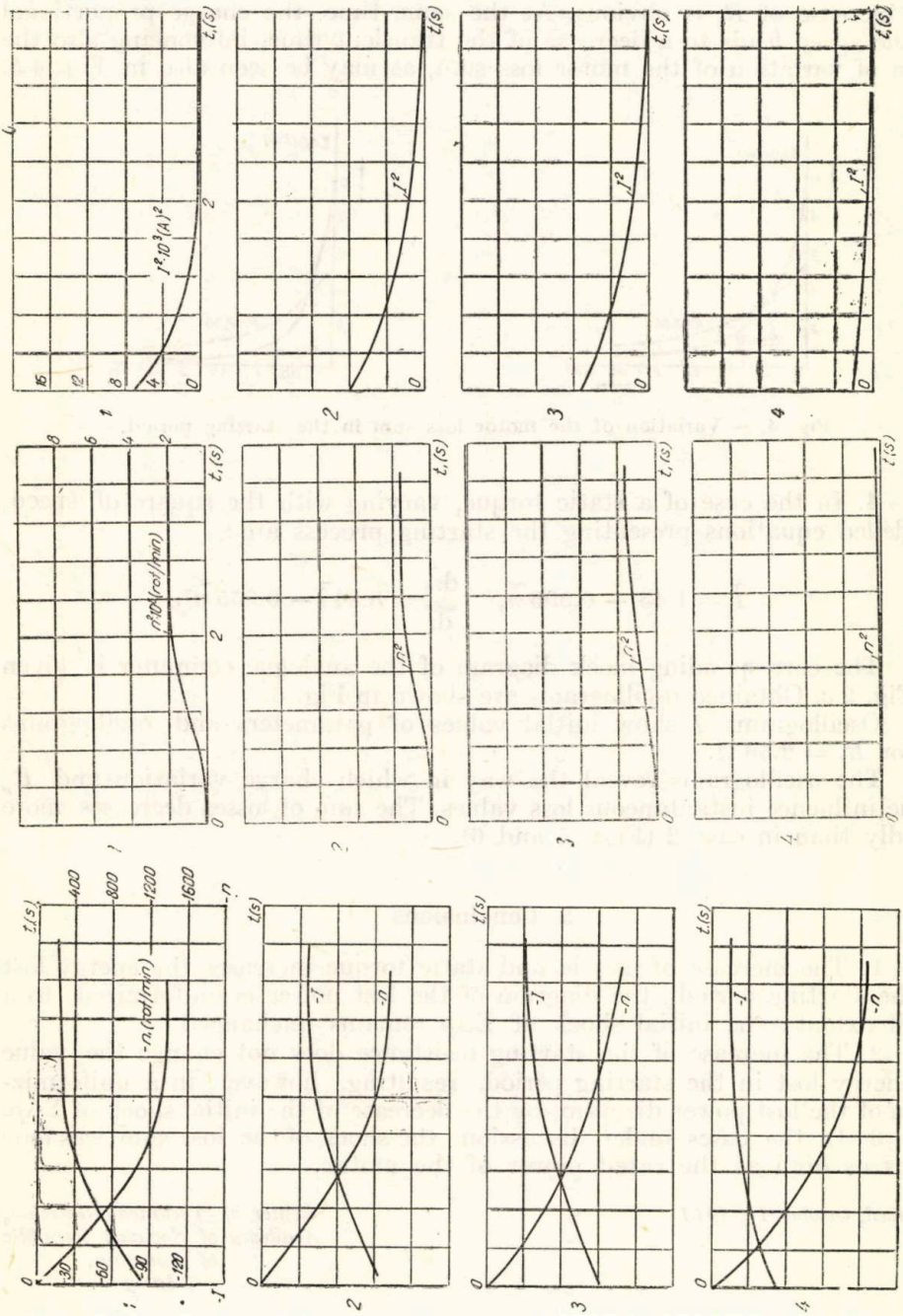


Fig. 3. — Oscillograms of $-I$, $-n$, I^2 and n^2 in the case of M_s = const.

the increase of R_t is obvious. At the same time, the charge proportional to the speed leads to a decrease of the transient time, influencing also the form of variation of the motor loss sum, as may be seen also in Fig. 4 *b*.

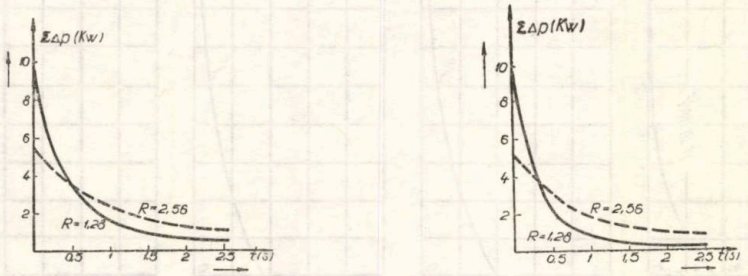


Fig. 4. — Variation of the motor loss sum in the starting period.

4. In the case of a static torque, varying with the square of speed, modelled equations presenting the starting process are :

$$\tilde{I} = 1.43 - 0.596\,\tilde{n}, \qquad \frac{d\tilde{n}}{dt} = 3.34\tilde{I} - 0.355\,\tilde{n}^2. \tag{5}$$

The corresponding block diagram of the analogue computer is given in Fig. 2 *c*. Obtained oscillograms are shown in Fig. 6.

Oscillograms *1* show initial values of parameters and oscillograms *2*, for $R_t = 2.56\ \Omega$.

The oscillograms reveal the way in which charge variation and R_p value influence instantaneous loss values. The sum of losses decreases more rapidly than in case 2 (Figs. 5 and 6).

5. Conclusions

1. The increase of inertia and static torque increases the energy lost in the starting period ; the diagram of the lost power is uniformized to a small extent ; the initial shock of $\Sigma\Delta p$ remains unchanged.

2. The increase of the starting resistance does not change the value of energy lost in the starting period, resulting, however, in a uniformization of the lost power diagram, by the decrease of the initial shock of $\Sigma\Delta p$.

3. In the cases under discussion, the shock of the loss sum was four times as high as the rated power of the motor.

Received, October 1 , 1971

Center of Technical Reserches,
Academy of Socialist Republic
of Romania,
Jassy

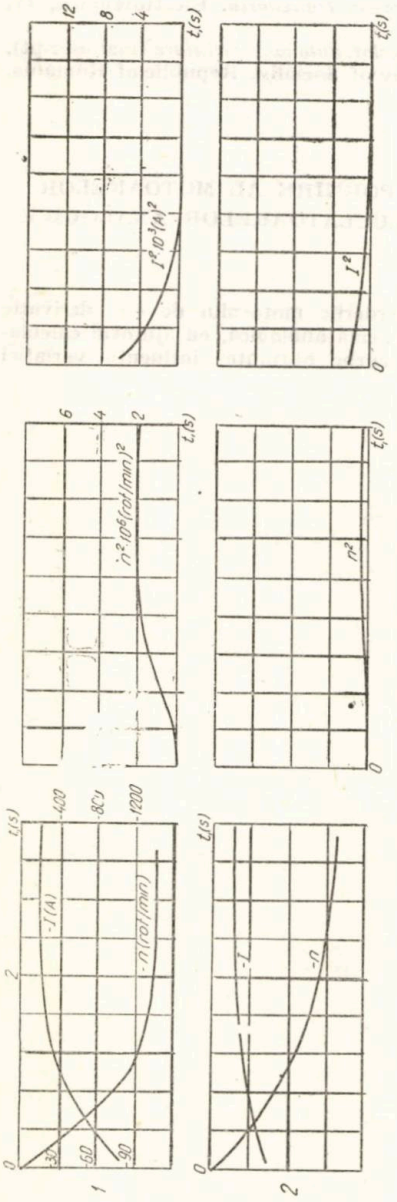


Fig. 5. — Oscillograms obtained for $M_s = kn$.

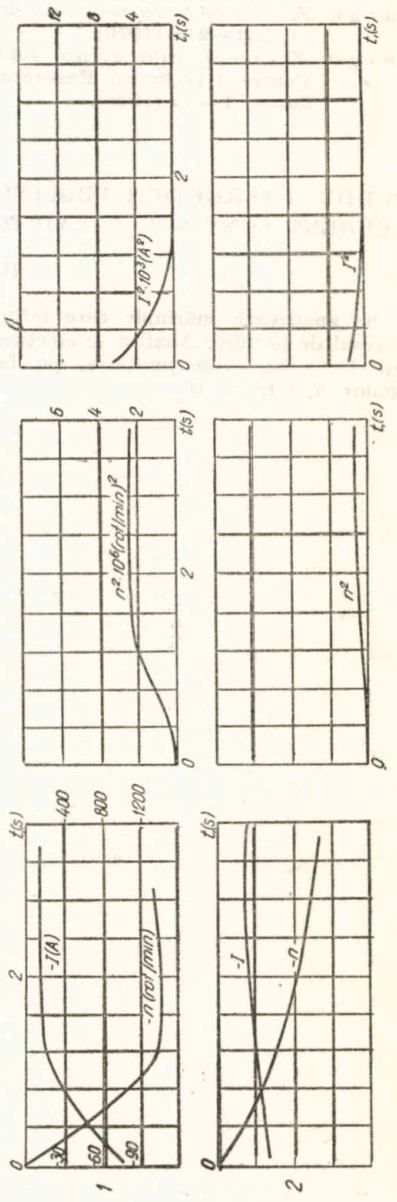


Fig. 6. — Oscillograms obtained for $M_s = kn^2$.

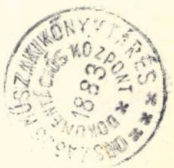
REFERENCES

1. Murgu Z., *Comportarea motorului de c. c. în regim tranzitoriu.* Electrotehnica, **17**, 7, 241—248 (1970).
2. Murgu Z., *Consideraţii asupra studiului sistemelor automate neliniare* (manuscript). Centre of Technical Researches, Academy of Socialist Republic of Romania, Jassy, 1—44 (1966).

STUDIUL ENERGETICII PROCESULUI DE PORNIRE AL MOTOARELOR DE CURENT CONTINUU CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ANALOGICE

(Rezumat)

Se analizează mărimile care influenţează pierderile motorului de c.c. derivaţie în procesul de pornire. Analiza se efectuează pe o schemă analogică, cu ajutorul calculatorului electronic, evidenţiindu-se, pe familiile de curbe obţinute, influenţa variaţiei mărimilor R, GD^2 şi M_s.



Nr. coli tipar 12

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Iaşi, Str. Vasile Alecsandri nr. 6, sub cd. nr. 241
Republica Socialistă România

1974 JAN 19

40822

1503/3

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XIX (XXIII)

Fasc. 3–4

SECŢIA III ELECTROTEHNICĂ
ELECTRONICĂ
AUTOMATIZĂRI

1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XIX (XXIII)

Fasc. 3–4

SECŢIA III ELECTROTEHNICĂ
ELECTRONICĂ
AUTOMATIZĂRI

1973

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI
III. ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ.
AUTOMATIZĂRI

Prof. dr. doc. N. V. BOȚAN
Prof. dr. ing. D. BĂRBULESCU
Prof. dr. ing. L. SEBASTIAN

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. HUGO ROSMAN (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIX (XXIII), Fasc. 3–4 1973

Secția III

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

SUMAR

Pag.

HUGO ROSMAN, Relații de tip Manley-Rowe relative la puterea activă instantanee (germ., rez. rom.) 9

SAVEL MITREA, Metodă pentru analiza regimului permanent în circuite neliniare *RL* serie, alimentate cu tensiune sinusoidală, prin liniarizarea pe porțiuni a caracteristicii neliniare (engl., rez. rom.) 17

ILIE POPESCU, Studiul regimului tranzitoriu în circuitul dublu ferorezonant paralel (rom., rez. franc.) 23

NORBERT ZITRON și M. ANTONESCU, Funcționarea dublorului feromagnetic de frecvență în regim subarmonic (germ., rez. rom.) 33

DANA BALAN, Studiul funcționării bobinei neliniare comandate ortogonal, excitată prin flux sinusoidal, în regim de magnetizare liberă și forțată (rom., rez. germ.) 41

VIOREL COSMA, Asupra determinării perioadei oscilațiilor de relaxare obținute în circuitele electrice care conțin un element neliniar cu caracteristica în *S* (rom., rez. engl.) 53

VIOREL COSMA, N. ALEXANDRU și PARASCHIVA HABA, Multivibrator cuplat magnetic, de frecvență variabilă, cu ieșire monofazată (engl., rez. rom.) 61

M. ANTONIU, JOHANNES TOBIE, MARIANA KENDLER, DINA CĂRUCERU, M. IANOȘ, GH. CHIRIAC, M. IACOB și I. SOLOMON, Cercetări experimentale asupra creșterii vitezei de lucru la megohmmetrul românesc de 2 500 V (germ., rez. rom.) 67

M. CREȚU, Metodă diferențială pentru determinarea cosinusului unghiului electric și a raportului amplitudinilor a două tensiuni sinusoidale de aceeași frecvență, prin realizarea egalității modulilor (rom., rez. germ.) 79

Pag.

ELENA AGAFIȚEI și ADRIAN CREȚU, Considerații asupra metodei electronice de compensare a erorilor transformatorului de curent (rom., rez. engl.,) 87

AL. VALACHI, Sinteza simultană a unui grup de funcții logice pătratice incomplet definite (franc., rez. rom.) 97

AL. SIMION, Asupra unei metode de construcție a diagramei curentului mașinii asincrone monofazate (germ., rez. rom.) 105

I. ANDRONE, Cu privire la diagramele de funcționare ale mașinii asincrone (rom., rez. engl.) 117

ROLF UNBEHAUEN (R. F. Germania), Metodă de verificare a stabilității sistemelor liniare periodic variabile în timp (germ., rez. rom.) 127

DAN SIMOVICI și CORINA REISCHER, Asupra realizării automatului atașat extensiei unui semigrup (engl., rez. rom.) 141

LEOPOLD SEBASTIAN, N. NEGOESCU și TEOHARI GANCIU, Asupra unei metode grafo-analitice de determinare a autooscilațiilor unei clase particulare de sisteme automate neliniare (engl., rez. rom.) 149

GH. CAȘLER, I. CONDREA și VLADIMIR BURGARD, Contribuții la calculul sistemelor hidraulice de urmărire ale mașinilor-unelte de prelucrat prin copiere după șablon rigid (rom., rez. franc.) 159

CORNELIU HUȚANU, Asupra comportării dinamice a autodinelor regulatoare de tensiune funcționînd în gol (rom., rez. franc.) 171

MIRCEA OPRIȘOR, VIRGIL MOGA și ADRIAN CIUTĂ, Contribuții la studiul reglării în impulsuri a frînării mașinii serie de curent continuu (germ., rez. rom.) 179

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH și MIRCEA GUȘĂ, Influența bobinei de stingere din neutrul transformatorului asupra solicitărilor izolației înfășurărilor acestuia la aplicarea tensiunii de impuls (rom., rez. germ.) 189

RADU FLORESCU, Posibilități de rezolvare a unor probleme de iluminat pe baza analogiei cu cîmpul electrostatic (rom., rez. franc.) 197

RECENZII 203

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XIX (XXIII), Fasc. 3—4 1973

Section III

ELECTROTECHNICS. ELECTRONICS. AUTOMATION

CONTENTS

Pp.

HUGO ROSMAN, Manley-Rowe Beziehungen betreffs die Augenblickswirkleistung (German, Romanian summary) 9

SAVEL MITREA, A Piece-Wise Linear Method for Solving the Steady-State in Sinevoltage-driven Series *RL* Nonlinear Circuits (English, Romanian summary) 17

ILIE POPESCU, Étude du régime transitoire dans le circuit double-ferrorésonant parallèle (Romanian, French summary) 23

NORBERT ZITRON und MIHAI ANTONESCU, Arbeitsweise des ferromagnetischen Frequenzverzweifacher in subharmonischen Vorgang (German, Romanian summary) 33

DANA BALAN, Arbeitsweise der nichtlinearen orthogonal-gesteuerten Spule bei sinusförmiger Flußerregung im freien und gezwungenen Magnetisierungvorgang (Romanian, German summary) 41

VIOREL COSMA, About Determining the Period of the Relaxation Oscillations in the Electric Circuits Containing a Non-Linear Element with a *S*-Type Characteristic (Romanian, English summary) 53

VIOREL COSMA, N. ALEXANDRU and PARASCHIVA HABA, Adjustable Frequency-Type Magnetic-Coupled Multivibrator with Single Phase Output (English, Romanian summary) 61

M. ANTONIU, JOHANNES TOBIE, MARIANA KENDLER, DINA CĂRUCERU, M. IANOȘ, GH. CHIRIAC, M. IACOB und I. SOLOMON, Experimentelle Untersuchungen zur Steigerung der Arbeitsgeschwindigkeit des rumänischen Widerstandsmessers mit 2 500 V Betriebspannung (German, Romanian summary). 67

Pp.

M. CREȚU, Differentielle Methode zur Bestimmung des elektrischen Winkelscosinus und des Amplitudenquotients von zwei Spannungen durch Realisierung der Modulengleichheit (Romanian, German summary) 79

ELENA AGAFIȚEI and ADRIAN CREȚU, Considerations on Electronic Compensation Method of Current Transformer Errors (Romanian, English summary) 87

AL. VALACHI, Synthèse simultanée d'un groupe de fonctions logiques quadratiques incomplètement définies (French, Romanian summary) 97

AL. SIMION, Über eine Konstruktionsmethode des Stromdiagrammes der Einphasen-Asychronmaschine (German, Romanian summary) 105

I. ANDRONE, About the Operation - Diagrams of the Electrical Induction Machines (Romanian, English summary) 117

ROLF UNBEHAUEN (Bundesrepublik Deutschland), Ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung periodisch zeitvarianter linearer Systeme (German, Romanian summary) 127

DAN SIMOVICI and CORINA REISCHER, On the Realization of the Automation Related to an Extension of a Semigroup (English, Romanian summary) 141

LEOPOLD SEBASTIAN, N. NEGOESCU and TEOHARI GANCIU, Grapho-Analytical Method for the Determination of Selfoscillation for a Particular Class of Nonlinear Automatic Systems (English, Romanian summary) 149

GH. CAȘLER, I. CONDREA et VLADIMIR BURGARD, Contributions au calcul des servosystèmes hydrauliques des machines-outils de copiage d'après le gabarit (Romanian, French summary) 159

CORNELIU HUȚANU, Sur le comportement dynamique des autodynes régulatrices de tension au fonctionnement à vide (Romanian, French summary) 171

MIRCEA OPRIȘOR, VIRGIL MOGA und ADRIAN CIUTĂ, Beiträge zum Studium der Impulsenregelung der Bremsung von Gleichstromreihenschlußmaschinen (German, Romanian summary) 179

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH und MIRCEA GUȘĂ, Der Einfluß der Läschspule im Sternpunkt des Transformators über die Isolationsbeanspruchungen dieser Wicklungen bei Stoßspannung (Romanian, German summary) 189

RADU FLORESCU, Sur les possibilités de résoudre certains problèmes d'éclairage, à partir de l'analogie avec le champ électrostatique (Romanian, French summary) 197

BOOK REVIEWS 203

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIX (XXIII), вып. 3—4 1973

Секция III

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА. АВТОМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ГУГО РОСМАН, Соотношения Мэнли-Роу для мгновенного активного мощности (нем., рез. рум.) 9

САВЕЛ МИТРЯ, Кусочно-линейный метод для исследования периодического режима в последовательных индуктивно-резистивных нелинейных цепях (англ., рез. рум.) 17

ИЛИЕ ПОПЕСКУ, Исследование переходного процесса в параллельной двухферрорезонантной цепи (рум., рез. франц.) 23

НОРБЕРТ ЦИТРОН и М. АНТОНЕСКУ, Работа ферромагнитного удвоителя частоты в субгармоническим режиме (нем., рез. рум.) . 33

ДАНА БАЛАН, Исследование работы нелинейной катушки с прямоугольным управлением и с возбуждением синусоидальным магнитным потоком, в режиме свободной и принужденной магнетизации (рум., рез. нем.) 41

ВИОРЕЛ КОСМА, Об определении периода релаксационных колебаний полученных в электрических цепях с нелинейным элементом с характеристикой в S (рум., рез. англ.). 53

ВИОРЕЛ КОСМА, Н. АЛЕКСАНДРУ и ПАРАСКИВА ХАБА, Однофазный магнитосцепленный мультивибратор переменной частоты (англ., рез. рум.) 61

М. АНТОНИУ, ЙОГАННЕС ТОБИЕ, МАРЯНА КЕНДЛЕР, ДИНА КЭРУЧЕРУ, М. ЯНОШ, Г. КИРИЯК, М. ЯКОБ и И. СОЛОМОН, Экспериментальные исследования о росте рабочей скорости румынского мегометра на 2500 *в* (нем., рез. рум.) 67

Стр.

М. КРЕЦУ, Дифференциальный метод для определения электрического косинуса и отношения амплитудов двух напряжений осуществлением уровнивания модулей (рум., рез. нем.) 79

ЕЛЕНА АГАФИЦЕЙ и АДРИАН КРЕЦУ, Соображения об электронном компенсации погрешностей трансформатора тока (рум., рез. англ.) 87

АЛ. ВАЛАКИ, Синтез квадратических логических функций непольно определенные (франц., рез. рум.) 97

АЛ. СИМИОН, Об одном методе построения диаграммы тока однофазной асинхронной машины (нем., рез. рум.) 105

И. АНДРОНЕ, К рабочему диаграммам электрических асинхронных машин (рум., рез. англ.) 117

РОЛЬФ УНБЕГАУЕН (ФГР), Способ проверения устойчивости линейных систем периодически изменяющихся во времени (нем., рез. рум.) 127

ДАН СИМОВИЧ и КОРИНА РЕЙШЕР, Достиженя автомата поставленного екстенсии некоторого полугруппа (англ., рез. рум.) 141

ЛЕОПОЛЬД СЕБАСТЯН, Н. НЕГОЕСКУ и ТЕОХАРИ ГАНЧЮ, Графоаналитический метод определения автоколебаний для частного класса нелинейных автоматических систем (англ., рез. рум.) . . 149

Г. КАШЛЕР, И. КОНДРЯ и ВЛАДИМИР БУРГАРД, К расчету гидравлических следящих систем металлорежущих копировальных станков (рум., рез. франц.) 159

КОРНЕЛЮ ХУЦАНУ, Об динамическом поведении автодин регулируемых напряжении в холостом ходе (рум., рез. франц.) 171

МИРЧЯ ОПРИШОР, ВИРДЖИЛ МОГА и АДРИАН ЧЮТЭ, Вклад к изучению широтно-импульсного регулирования электрического торможения двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением (нем., рез. рум.) 179

Н. ГАВРИЛАШ, РОДИКА ОЛАХ и МИРЧЯ ГУШЕ, Влияние дугочасящей катушки присоединена к нейтрали трансформатора на поведение изоляции их обмоток при воздействии импульсного напряжения (рум., рез. нем.) 189

РАДУ ФЛОРЕСКУ, Возможности решения некоторых вопросов в связи с освещением на оснований аналогий с электростатическим полем (рум., рез. франц.) 197

РЕЦЕНЗИИ 203

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D.K. 621.373.93

MANLEY-ROWE BEZIEHUNGEN BETREFFS DIE AUGENBLICKSWIRKLEISTUNG

VON

HUGO ROSMAN

1. Die klassischen Begriffe von Schein-, Wirk- und Blindleistung im stationären harmonischen Vorgang wurden, in den letzten Jahren, kritisch von V. N. Nedelcu [1] untersucht. Grenzen zu überschreiten und einige Inkonsequentzen zu beseitigen, wurden in solchen Vorgängen neue Begriffe als: komplexer Augenblicksscheinleistung, Augenblickswirk- und -blindleistung, pulsierende Wirk- und Blindleistung, die, nach Meinung des zitierten Verfassers, die Bildung einer einheitlicher Leistungstheorie in linearen Kreisen, im stationären harmonischen Vorgang, ermöglichen. Diese Größen zeigen in der Theorie der Synchronmaschinen mit scheinbaren Polen [2], bei Untersuchung der Energieumwandlung in den Synchronmotoren [3] u. a. ihre Nützlichkeit.

Wird ein linearer Zweipol mit der Klemmenspannung:

$$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t + \gamma_u) \tag{1}$$

und mit dem Strom in den Zugangsklemmen

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \gamma_i) \tag{2}$$

betrachtet, deren man die komplexen Effektivwerten

$$\underline{U} = Ue^{j\gamma_u}, \quad \underline{I} = Ie^{j\gamma_i} \tag{3}$$

beilegt, definiert V. N. Nedelcu als *komplexe Augenblicksscheinleistung* den Auedruc

$$\underline{s} = p + jq = \underline{U}\underline{I}' + \underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\ . \tag{4}$$

Hierin ist

$$p = \mathcal{R}_e(\underline{s}) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi) \tag{5}$$

die *Augenblickswirkleistung* und:

$$q = \mathcal{I}_m(\underline{s}) = UI\sin\varphi + UI\sin(2\omega t + \varphi) \tag{6}$$

— die *Augenblicksblindleistung*, mit $\varphi = \gamma_u - \gamma_i$.

Die *Wirkleistung*, $P = UI\cos\varphi$, folgt als Mittelwert der Augenblickswirkleistung, so daß

$$p = P + p_2, \tag{7}$$

wobei

$$p_2 = UI\cos(2\omega t + \varphi) \tag{8}$$

die *pulsierende Wirkleistung* bildet.

Es ist notwendig zu bemerken, da wenn die Spannung an den Zweipolsklemmen und der Strom in den Zugangsklemmen sich unter der Form:

$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \gamma_u), \quad i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \gamma_i) \tag{9}$$

schreiben, dann werden die Augenblickswirk- und -blindleistung mit den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{UI}^* - \underline{UI}e^{j2\omega t}, \quad p = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi), \\ q &= UI\sin\varphi - UI\sin(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{10}$$

bestimmt [4].

Man kann die Bestimmungsbeziehungen unter der konzentrierter Form:

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{UI}^* \pm \underline{UI}e^{j2\omega t}, \quad p = UI\cos\varphi \pm UI\cos(2\omega t + \varphi), \\ q &= UI\sin\varphi \pm UI\sin(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{11}$$

schreiben, wobei der Pluszeichen dem Falle wenn die Klemmenspannung und der Strom von der Form (1), (2) und der Minuszeichen dem Falle wenn sie von der Form (3) sind, entsprechen.

2. Die reaktiven nichtlinearen (selbstparametrische), verlust- und hysteresisfreien Elemente in denen keine nichtperiodische Prozesse stattfinden, besitzen die besondere Eigenschaft die Wirkenergie von einer Frequenz auf einer anderer übertragen zu können.

Wird ein Kreis, der von zwei sinusförmigen EMK's mit den Frequenzen f_1, f_2 erregt ist, der wenigstens ein solches nichtlineares Element enthält, dann wird die Spannung an den Elementsklemmen und der Strom in den Zugangsklemmen doppelt-periodische Zeitfunktionen, in deren Spektrum sich Kombinationsschwingungen von der Form $kf_1 + lf_2$, $(k, l = -\infty, \ldots, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty)$, herausheben [5]. Diese Signale lassen, in bestimmten Bedingungen die man als befriedigt annimt, Entwicklungen in Doppelt-Fourier-Reihen und zwar:

$$\begin{cases} u(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \underline{U}_{k,l}\, e^{j(k\omega_1 + l\omega_2)t}, \\ i(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \underline{I}_{k,l}\, e^{j(k\omega_1 + l\omega_2)t}, \end{cases} \tag{12}$$

wobei

$$\begin{cases} \underline{U}_{kl} = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} d(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-j(k\omega_1 + l\omega_2)t}\, d(\omega_1 t), \\ \underline{I}_{kl} = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} d(\omega_2 t)\int_0^{2\pi} i(t)\, e^{-j(k\omega_1 + l\omega_2)t}\, d(\omega_1 t). \end{cases} \tag{13}$$

Manley und Rowe stellten im Jahre 1956 [7] die Beziehungen die Ihren Namen tragen auf, die von den Wirkleistungen die sich zwischen den Harmonischen vom Rang k und l der Spannung und des Stroms übertragen, befriedigt sind:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{kP_{k,l}}{k\omega_1+l\omega_2}=0,\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{lP_{k,l}}{k\omega_1+l\omega_2}=0, \tag{14}$$

wobei

$$P_{k,l}=\mathcal{R}_e\,(\underline{S}_{k,l})=\mathcal{R}_e\,(\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}^*_{k,l}), \tag{15}$$

mit $\underline{U}_{k,l}$, $\underline{I}_{kl}$ die von (13) bestimmt sind.

Zweck dieser Arbeit ist, hauptsätzlich, die Bestimmung von Beziehungen vom Manley-Rowe Typ betreffs die Augenblickswirkleistung und, subsidiär, die Erlangung solcher Beziehungen auch für andere Grössen.

3. Es werden zwei Skalarfunktionen $f(t)$, $g(t)$, doppelt-periodisch in bezug zur unabhängige Variable t, mit den selben Perioden $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$, die Funktion $f(g)$ eindeutig seiend, betrachtet. In bestimmten Bedingungen, die als befriedigt betrachtet werden (z. B. [6]), lassen solche Funktionen Entwicklungen in Doppelt-Fourier-Reihen:

$$\begin{cases} f(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\underline{F}_{k,l}\,e^{j(k\omega_1+l\omega_2)t}, \\ g(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\underline{G}_{k,l}\,e^{j(k\omega_1+l\omega_2)t}, \end{cases} \tag{16}$$

zu, wobei

$$\begin{cases} \underline{F}_{k,l}=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}d(\omega_2t)\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-j(k\omega_1+l\omega_2)t}\,d(\omega_1t), \\ \underline{G}_{k,l}=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}d(\omega_2t)\int_0^{2\pi}g(t)\,e^{-j(k\omega_1+l\omega_2)t}\,d(\omega_2t). \end{cases} \tag{17}$$

Die komplexen Amplituden $\underline{F}_{k,l}$, $\underline{G}_{k,l}$ befriedigen die Beziehungen:

$$\underline{F}_{k,l}=\underline{F}^*_{-k,-l},\quad \underline{F}_{-k,-l}=\underline{F}^*_{k,l},\quad \underline{G}_{k,l}=\underline{G}^*_{-k,-l},\quad \underline{G}_{-k,-l}=\underline{G}^*_{k,l}. \tag{18}$$

4. Wird (17) mit $jk\underline{G}^*_{k,l}\mp jk\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}$ multipliziert und addiert man in bezug mit allen ganzen negativen, nullen oder positiven Werten der Kennziffern k, l, dann ergibt sich:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}[j\,k\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^*_{k.l}\mp jk\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}_{k,l}e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}]=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d(\omega_2t)\int_0^{2\pi}f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}jk\,[\underline{G}^*_{k,l}\,e^{-j(k\omega_1+l\omega_2)t}-\underline{G}_{k,l}\,e^{j(k\omega_1+l\omega_2)t}]\,d(\omega_1t). \tag{19}$$

Berücksichtigend daß:

$$(20)\quad \frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}k\underline{G}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k\omega_1 + l\omega_2)t} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}k\,\underline{G}^{*}_{k,l}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k\omega_1+l\omega_2)t}$$

kann die Gleichung (19) unter den äquivalenten Form:

$$(21)\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} [\mathrm{j}k\underline{F}_{k,l}\underline{G}^{*}_{k,l} \mp \mathrm{j}k\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega_2 t) \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\partial g(t)}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

geschrieben werden.

Aber

$$(22)\quad \frac{\partial g(t)}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t)\Big|_{\omega_2 t=\mathrm{const.}} = \mathrm{d}g(t)$$

also ist

$$(23)\quad \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\partial g}{\partial(\omega_1 t)}\,\mathrm{d}(\omega_1 t) = \int_{g(\omega_1 t=0)}^{g(\omega_1 t=2\pi)} f(t)\,\mathrm{d}g(t) = \oint f(g)\,\mathrm{d}g,$$

wegen den periodischen Charakter der Funktion $g(t)$. Weil $f(g)$ eine eindeutige Funktion ist,

$$(24)\quad \oint f\,\mathrm{d}g = 0,$$

so daß

$$(25)\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k[\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l} \mp \underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = 0.$$

Spaltet man den Real- und Imaginärteile, so ergibt sich:

$$(26)\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \pm \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1+l\omega_2)t}]\} = 0,$$

und entsprechend

$$(27)\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\{\mathcal{I}m(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \pm \mathcal{I}m[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1+l\omega_2)t}]\} = 0.$$

Man berücksichtigt, daß auf Grund der Ausdrücken (18):

$$\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) = \mathcal{R}e(\underline{F}^{*}_{-k,-l}\,\underline{G}_{-k,-l}) = \mathcal{R}e(\underline{F}_{-k,-l}\,\underline{G}^{*}_{-k,-l}), \tag{28}$$

$$\mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = \mathcal{R}e[\underline{F}^{*}_{-k,-l}\,\underline{G}^{*}_{-k,-l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = \tag{29}$$

$$= \mathcal{R}e\,[\underline{F}_{-k,-l}\,\underline{G}_{-k,-l}\,e^{-j2(k\omega_1+l\omega_2)t}].$$

Gleichfalls wird der Ausdruck (26) durch Trennung des Wertbereiches der Kennziffer k geschrieben:

$$\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \mp \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}]\} + \tag{30}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \mp \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}]\}.$$

Werden in der ersten Summe die Vorzeichen der Kennziffern k und l vertauscht, unter Berücksichtigung von (28), (19) erhält man:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \mp \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}]\} = 0. \tag{31}$$

Wenn man den Mittelwert des Ausdrucks (31) für die Periode $T_{k,l} = 2\pi/(k\omega_1 + l\omega_2)$ der doppelt-periodischen Funktionen $f(t)$, $g(t)$, berechnet, dann findet man die Beziehung:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) = 0, \tag{32}$$

die in [8] bestimmt wurde, wieder. Gleichfalls folgt auch die Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} k\mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = 0, \tag{33}$$

die nützlich für die folgenden Betrachtungen ist.

Auf ähnliche Weise können auch die Gleichungen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} l\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) \mp \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = 0, \tag{34}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} l\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}^{*}_{k,l}) = 0, \tag{35}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} l\mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\,\underline{G}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = 0 \tag{36}$$

bestimmt werden.

Man erhält ähnliche Ergebnisse wenn eine von den doppelt-periodischen Funktionen $f(t)$, $g(t)$ oder beide, Vektorial-funktionen von der Skalarvariable t sind.

5. Wenn die Funktion $g(t)$ stätig und ableitbar für $\forall t \in \boldsymbol{R}$ ist, dann ist ihre Ableitung gleichfalls doppelt-periodisch in bezug zur selben Variable, hat die selbe Periode und lasst die Entwicklung in Doppelt-Fourier-Reihen

$$m(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underline{M}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k\omega_1 + l\omega_2)t} \tag{37}$$

zu, wobei

$$\underline{M}_{k,l} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}(\omega_2 t) \int_0^{2\pi} m(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k\omega_1 + l\omega_2)t}\, \mathrm{d}(\omega_1 t). \tag{38}$$

Aus (16) und (37) folgt

$$\underline{M}_{k,l} = \mathrm{j}(k\omega_1 + l\omega_2)\underline{G}_{k,l} \tag{39}$$

so daß die Beziehungen (31)...(33) können unter der äquivalenten Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}^*_{k,l}) \pm \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1 + l\omega_2)t}]}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0, \tag{40}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}^*_{k,l})}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0, \tag{41}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k\mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1 + l\omega_2)t}]}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0, \tag{42}$$

geschrieben werden.

Gleichartig erhält man auch die Beziehungen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l\{\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}^*_{k,l}) \pm \mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1 + l\omega_2)t}]}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0, \tag{43}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l\mathcal{R}e(\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}^*_{k,l})}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0, \tag{44}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l\mathcal{R}e[\underline{F}_{k,l}\, \underline{M}_{k,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2(k\omega_1 + l\omega_2)t}]}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0. \tag{45}$$

6. Die Beziehungen (40)...(45) haben wichtige Anwendungen im Energiebilanz der nichtlinearen Kreisen und elektromagnetischen Feldern (eigenparametrischen). Z. B., wenn man ein Kreis, der von zwei sinusförmigen

EMK's mit den Frequenzen f_1, f_2 erregt wird, der wenigstens ein nichtlineares verlust- und hysteresisfreies Element im welchen keine nichtperiodische Prozesse stattfinden enthält, betrachtet, dann sind die Spannung an den Elementsklemmen und dessen Strom, wie man in § 1 erwähnte, doppelt-periodischen Zeitfunktionen mit den gleichen Perioden $T_1 = 2\pi/\omega_1$, $T_2 = 2\pi/\omega_2$, und ihre Abhängigkeit ist eindeutig. In diesen Bedingungen kann man die Beziehungen (40)...(42), nachdem man die Substitutionen: $\underline{F}_{k,l} = \underline{U}_{k,l}$, $\underline{M}_{k,l} = \underline{I}_{k,l}$ einführt, verwenden und es folgt:

$$(46) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k\{\mathcal{R}e(\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}^*_{k,l}) \pm \mathcal{R}e[\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}]}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0$$

und eine andere, die ähnlich ist. Aber, wegen der Beziehung (11_2) folgt es:

$$(47) \qquad \mathcal{R}e(\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}^*_{k,l}) \mp \mathcal{R}e[\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = p_{k,l},$$

wobei $p_{k,l}$ die Augenblickswirkleistung betreffs den Harmonischen vom Rang k und l. Also

$$(48) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{kp_{k,l}}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0$$

und gleichartig

$$(49) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{lp_{k,l}}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0.$$

Die Ausdrücke (48), (49) bilden *die Manley-Rowe Beziehungen betreffs die Augenblickswirkleistung*.

Wird gleichartig mit den Ausdrücken (41), (44) verfahren dann findet man die Manley-Rowe Beziehungen (14) betreffs die Wirkleistung wieder.

Schliesslich, führen die Ausdrücke (42), (45), auf der selben Weise, zu

$$(50) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{kp_{2k,l}}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0,$$

und entsprechend

$$(51) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{lp_{2k,l}}{k\omega_1 + l\omega_2} = 0,$$

wobei, auf Grund der Gleichung (8), man mit

$$(52) \qquad \mathcal{R}e[\underline{U}_{k,l}\,\underline{I}_{k,l}\,e^{j2(k\omega_1+l\omega_2)t}] = p_{2k,l}$$

— die pulsierende Wirkleistung betreffs die Harmonischen vom Rang k und l bezeichnete. Die Ausdrücke (50) und (51) stellen *die Manley-Rowe Beziehungen betreffs die pulsierende Wirkleistung* dar.

7. Es sind Verallgemeinerungen der Beziehungen (48)...(51) im Sinne derer in [8] erlangte, möglich. Gleichfalls, können Manley-Rowe Beziehungen betreffs die Augenblickswirkleistungen, die in jeder Raumeinheit oder in einem begrenztem Bereich des elektromagnetischen Feldes [9], der von zwei sinusförmigen Quellen mit den Frequenzen f_1, f_2 erregt ist, erzeugt, eingesaugt oder ausgestrahlt sind, bestimmt werden.

Eingegangen am 6. November 1973

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Grundlagen der
Elektrotechnik und elektrische Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Nedelcu V. N., *Die einheitliche Leistungstheorie der unsymmetrischen und mehrwelligen Mehrphasensysteme.* ETZ-A, **84**, *5*, 153—157 (1963).
2. Nedelcu V. N., *New Aspects of Solvent-Pole Synchronous Machine Theory.* Wiss. Z. Elektrotechn., **17**, *1*, 1—16 (1971).
3. Неделку В. Н., *Особенности преобразования энергии в реактивных синхронных двигателях.* Электричество, *11*, 11—50 (1970).
4. Rosman H., *Asupra puterii aparente instantanee în circuite electrice în regim permanent periodic.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **IX (XIII)**, *3—4*, 241—250 (1963).
5. Steiner K. H., Pungs L., *Parametrische Systeme.* Hirzel—Verlag, Stuttgart, 1965.
6. Тольстов Г. П., *Ряды Фурье.* ГИТТЛ, М.—Л., 1951, гл. **VII.**
7. Manley J. W., Rowe H. E., *Some General Properties of Nonlinear Elements. I. General Energy Relations.* Proc. of the I. R. E., **44**, 7, 904—913 (1956).
8. Rosman H., *On a Generalization of the Manley-Rowe Relations.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIX (XXIII)**, *1—2*, s. III, 29—38 (1973).
9. Rosman H., *Asupra puterii aparente instantanee în cîmpul electromagnetic în regim permanent periodic.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XI (XV)**, *3—4*, 279—300 (1965).

RELAŢII DE TIP MANLEY-ROWE RELATIVE LA PUTEREA ACTIVĂ INSTANTANEE

(Rezumat)

Se stabilesc relaţii de tip Manley-Rowe relative la puterea activă instantanee şi la puterea activă fluctuantă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D.C. 538.533; 538.561.25

A PIECE-WISE LINEAR METHOD FOR SOLVING THE STEADY-STATE IN SINEVOLTAGE-DRIVEN SERIES *RL* NONLINEAR CIRCUITS

BY

SAVEL MITREA

1. Introductory Remarks and Outline of the Method

In electrical circuits, either linear or nonlinear, if the input signal is periodic, the steady state response is also periodic. If the input signal to a linear circuit is sinusoidal the response is sinusoidal as well.

On supplying a nonlinear circuit with a sine-signal the output signal is periodic non-sinusoidal whose Fourier series expansion contains the fundamental term, higher harmonics and, in certain cases, subharmonics.

In the analysis of the steady-state in such circuits when supplied with periodic signals — in the simplest and most encountered cases, sine signals — the use of harmonic balance method is the most widespread. This method is extensively used in [1] from where one may get a clear image on the way it is to be handled and on its practicability as well. In brief, the method of harmonic balance consists in assuming the output under the form of a Fourier series expansion, with unknown coefficients, which substituted into the nonlinear differential equation of the system under investigation gives the possibility of obtaining a set of nonlinear algebraic equations from which the above mentioned unknown coefficients can be determined. An exact solution to the problem would be obtained if the entire (infinite) Fourier series were considered but this is obviously impossible due to the infinite number of equations involved. By retaining only a few terms of the series one cannot know how far one finds oneself from the exact solution [2, p. 233]. The method is practical only if the output signal is almost sinusoidal, therefore, the area of its use is severely restricted, especially so far as electric circuits are concerned.

Aizerman and Gantmacher [3] show that in analysing certain control systems the infinite Fourier series can be considered if the nonlinear characteristic is piece-wise linear; but the problem still remains quite involved so far as the computational part is concerned.

The author aims at solving the steady-state in some sine-driven electric nonlinear circuits by also using a piece-wise linear method but entirely dropping out the idea of taking the output under the form of a Fourier series. Any periodic function, satisfying the Dirichlet's conditions, can be represented by a Fourier series. By doing this, any further mani-

pulations with this function takes place in the analytic domain, a fact that presents many advantages. Unfortunately, by using this representation in applying the harmonic balance method to essentially nonlinear problems the matter becomes impractical if fairly accurate results are pursued. A periodic function can be approximately, and sometimes exactly, represented through a piece-wise analytic function which becomes nonanalytic at the points joining the analytic stretches. The periodic response can be sought in such a form, the analytic expressions on stretches and the coordinates of nonanalytic points being found by using the transient-state linear circuit theory provided that nonlinear characteristics of circuit elements are piece-wise linear approximated. It should be noted that if the nonlinear characteristic is actually piece-wise linear, as in the square-loop magnetic core reactors, the solution obtained by means of this method is exact. Consequently, the single error one can make by using this method is in approximating a nonlinear characteristic by pieces of straight line whereas, by treating the problem in the analytic domain the first error is made in approximating the actual nonlinear characteristic through an analytic function and the second one, in taking only a few terms of the Fourier series expansion of the output signal. The method presented here also have some disadvantages as compared to the harmonic balance method. First, one has to know in advance the output signal waveform; second, the problem is transcendental in its character and a computer has to be used for arithmetical drudgery; third, in the interpretation of results one has to have a fairly good physical insight of the phenomena.

In order to show the way in which the method is to be applied, the steady state in a simple *RL* series nonlinear circuit is considered. The problem of stability is not discussed here since the circuit is of the first order. In a future paper in which a second order circuit will be investigated, stability of the output signal will be treated as well.

2. Application

Let us consider the circuit shown in Fig. 1 where: $e = E \sin \omega t$ — sinevoltage source, i — current, R — linear resistor, L — magnetic core reactor.

If hysteresis is neglected the actual magnetic curve of iron-core reactors may be considered as composed of three straight lines joined together by two saturation knees. The simplest but not the best piece-wise linear approximation of the magnetic curve is represented in Fig. 2, where $N\Phi$ denotes the linkage flux. A better approximation would be obtained if five pieces of line were used but this will result in more complicated calculations. Instead, one may use the least-square method in order to improve the three-piece approximation. When steady-state is reached the representative point p makes excursions on the piece-wise linear characteristic between two symetrical-about-the-origin points designated as *2* and *2'*. At passing through point *1*, from the right to the left, the representative point switches the in-

ductance of the circuit from L_1 to L_2, and so on. Therefore the steady-state waveform of the current is composed of stretches of curve obtained in an analytical form by applying the transient-state linear circuit theory.

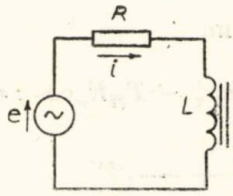


Fig. 1

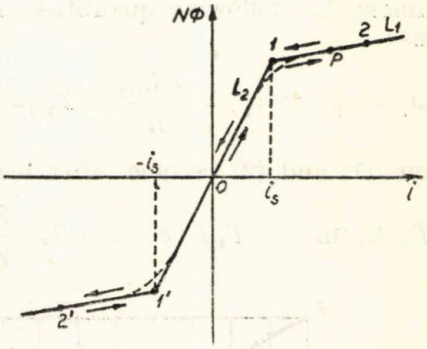


Fig. 2

The output signal has the fundamental term and odd harmonics only consequently we may consider a half wave that is obtained by the travelling of p on the paths, say, *1—2—1* and *1—1'*. At the starting point, *1*, the initial phase of the applied sinevoltage is ψ and the initial current is i_s. The representative point travels on the path *1—2—1* in t_1 seconds and the current again becomes i_s. We can write:

$$(1) \qquad i_s = \frac{E}{Z_1}\sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_1) + \left[i_s - \frac{E}{Z_1}\sin(\psi - \varphi_1)\right]\exp\left(-\frac{t_1 R}{L_1}\right),$$

where

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + L_1^2\omega^2}, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{L_1\omega}{R}.$$

For the path *1—1'* we write:

$$(2) \qquad -i_s = \frac{E}{Z_2}\sin(\omega t_2 + \omega t_1 + \psi - \varphi_2) + \left[i_s - \frac{E}{Z_2}\sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_2)\right]\exp\left(-\frac{t_2 R}{L_2}\right),$$

where

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + L_2\omega^2}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{L_2\omega}{R}.$$

Now we have to write the condition that the signal be periodic, that is :

$$\omega t_1 + \omega t_2 = \pi. \tag{3}$$

By substituting (3) into (2) we get two equations for any two unknowns from among the following quantities : E, ψ, ω, t_1, L_1, L_2, R, i_s. By using the relations :

$$\omega t_1 = \tau_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{\omega L_{1,2}}{R}, \quad Z_{1,2} = R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{1,2}}, \quad E_s = i_s Z_2, \quad E_n = \frac{E}{E_s}, \tag{4}$$

equations (1) and (2) become, after rearranging them,

$$T_{11} E_n \sin \psi + T_{12} E_n \cos \psi = T_{01} \frac{Z_1}{Z_2}, \quad T_{21} E_n \sin \psi + T_{22} E_n \cos \psi = T_{02}, \tag{5}$$

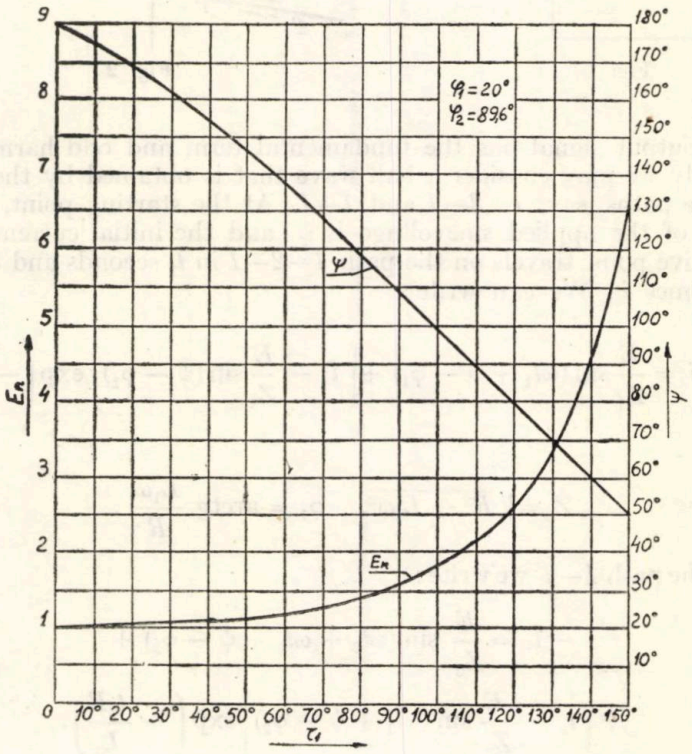


Fig. 3

in which all of the quantities are adimensional. Since $T_{jk} = f_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, \tau_1)$, generally, are complicated expressions we have to solve for E_n and ψ, τ_1 being taken as parameter. Thus we get :

(6) $$E_n = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \tau_1), \qquad \psi = f_2(\varphi_1, \varphi_2, \tau_1),$$

which, for given φ_1 and φ_2, can be plotted for τ_1 varying over the interval $[0, \pi]$.

In Fig. 3, E_n and ψ versus $0 \leqslant \tau_1 \leqslant 150°$ are plotted, for $\varphi_1 = 20°$, $\varphi_2 = 89{,}6°$.

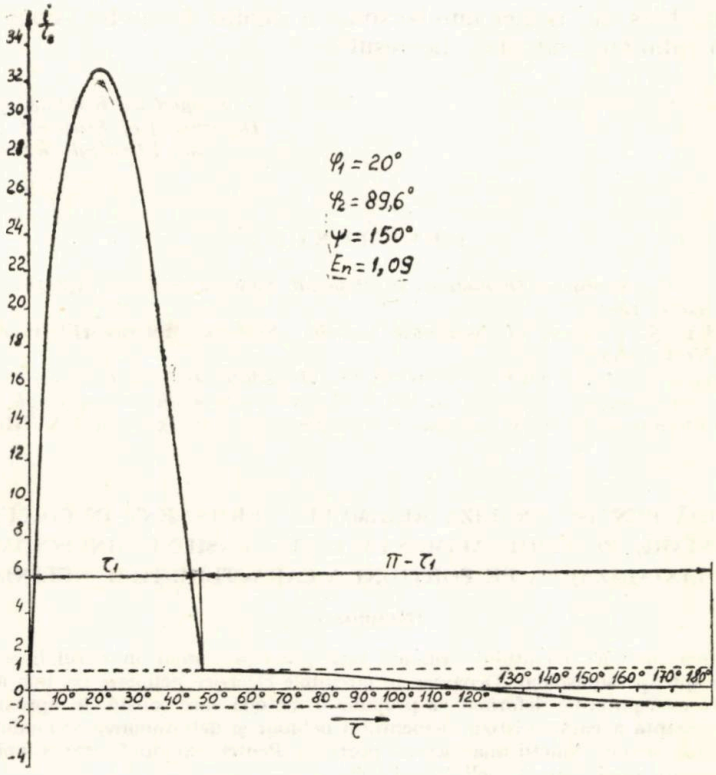


Fig. 4

By taking $\varphi_1 = 20°$, $\varphi_2 = 89{,}6°$, $E_n = 1{,}09$, $\psi = 150°$, $\tau_1 = 45°$, in Fig. 4 $i/i_s = f(\tau)$ is plotted for $0 \leqslant \tau \leqslant 180°$. The diagram from Fig. 4 can be completed with the waveform of the input sinevoltage and, in this way, we can read the initial conditions that would lead directly to steady-state, any transient state being absent.

If necessary, F o u r i e r analysis of the output can be carried out since all of the required data are available both graphically and analytically.

3. Conclusions

As different from the harmonic balance method the piece-wise linear method presented in this paper and applied to a simple nonlinear circuit, is equally practical for essentially nonlinear and almost linear circuits. In order to derive the full advantage out of this method one has to ensure a simple and good piece-wise linear approximation of the nonlinear characteristic and to find the piece-wise waveform for the output signal. Since the final relationships are rather cumbersome a digital computer should be used in order to tabulate and plot the results.

Received, September 16, 1973

Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Electrical Engineering
and Electrical Measurements

REFERENCES

1. Hayashy C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
2. Minorski N., *Theory of Nonlinear Control Systems.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.
3. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. П., *Определение периодических режимов в систетах с кусочно-линейной характеристикой, составленой из звеньев, паралельных двум заданным прямым.* Авт. и Телемех., **XVIII**, 2 (1957).

METODĂ PENTRU ANALIZA REGIMULUI PERMANENT ÎN CIRCUITE NELINIARE *RL* SERIE ALIMENTATE CU TENSIUNE SINUSOIDALĂ, PRIN LINIARIZAREA PE PORŢIUNI A CARACTERISTICII NELINIARE

(Rezumat)

Utilizarea metodei bilanţului armonic este practică numai în cazul în care semnalul de ieşire este aproape sinusoidal. Deoarece în circuitele electrice neliniare cel mai adesea semnalul de ieşire este puternic deformat se propune o metodă care constă în aproximarea prin segmente de dreaptă a caracteristicii elementului neliniar şi determinarea semnalului periodic de ieşire sub forma unei funcţii analitice pe porţiuni. Pentru exemplificare, se aplică metoda propusă în cazul unui circuit neliniar simplu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.316.11

STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITUL DUBLU FERORESONANT PARALEL *)

DE

ILIE POPESCU

1. Introducere

Studiul regimului tranzitoriu în circuitul dublu ferorezonant paralel (CDFRP), constituit din gruparea în paralel a unui rezistor liniar, a unui condensator liniar și a unei bobine neliniare comandate, se efectuează prin metode analitice aproximative, deoarece soluția analitică riguroasă a ecuației diferențiale neliniare obținută în acest caz poate fi determinată numai pentru cazuri particulare.

În această lucrare se analizează comportarea CDFRP în regim tranzitoriu [2], circuitul fiind excitat cu un semnal sinusoidal (cuplat la un generator ideal de curent sinusoidal).

2. Funcționarea CDFRP la tensiune redusă

Funcționarea CDFRP real în regim tranzitoriu poate fi urmărită și pe o schemă electrică echivalentă [2] în care caracteristica V—A neliniară a bobinei comandate (sau $\psi(i)$) a fost liniarizată convenabil pe porțiuni (pentru materiale magnetice cu saturație rapidă și pierderi foarte mici).

Întrucît caracteristica neliniară rezultantă $V—A$ a CDFRP este multiformă, rezultă că la o anumită valoare maximă a semnalului excitație pot corespunde semnale răspuns de valoare maximă redusă, medie sau ridicată (în funcție de parametrii circuitului și de faza inițială a semnalului excitație aplicat). Cele trei situații de mai sus pot fi obținute și din schema echivalentă (fig. 2) prin comutarea întrerupătoarelor K_1 și K_2 (pentru o singură alternanță).

*) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 2—4 iulie 1970.

Funcționarea CDFRP la tensiune redusă (la semnal răspuns redus în circuit) se obține cînd întrerupătoarele K, K_1' sînt închise iar K_1'', K_2 sînt deschise (acest caz a fost studiat în lucrarea [2]).

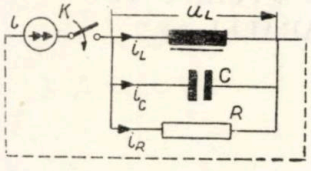


Fig. 1

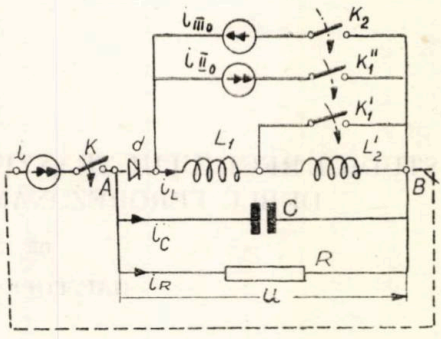


Fig. 2

3. Funcționarea CDFRP la tensiune medie

Trecerea semnalului răspuns în CDFRP, $u(t)$, de la valoare (maximă sau efectivă) redusă, la valoare medie este marcată în schema electrică echivalentă (fig. 2), prin închiderea întrerupătorului K_1'' simultan cu deschiderea întrerupătorului K_1' (la un moment $t' = t - t_m = t - t_A = 0$).

Ecuațiile de funcționare a CDFRP în regim tranzitoriu, pe porțiunea (II) de tensiune medie, sînt:

$$(1)\quad L_2 \frac{di_L}{dt} - Ri_R = 0,\ \frac{1}{C}\int_{\infty}^{t} i_C\,dt - Ri_R = 0,\ i_L + i_R + i_C = i(t) - i_{II}(t') = i(t'),$$

sau sub formă operațională:

$$(2)\quad pL_2\,\mathcal{L}i_L - R\,\mathcal{L}i_R = L_2 i_L(0),\ \frac{1}{pC}\mathcal{L}i_C - R\mathcal{L}i_R = -\frac{U_C(0)}{p},$$

$$\mathcal{L}i_L + \mathcal{L}i_R + \mathcal{L}i_C = \mathcal{L}i(t'),$$

iar imaginea semnalului răspuns, $u(t)$, este de forma:

$$\mathcal{L}u(t) = R\mathcal{L}i_R, \text{ cu } \mathcal{L}i_R = \frac{2\alpha p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_{II_0}^2}\mathcal{L}i(t') + \frac{2\alpha C p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_{II_0}^2}U_C(0) -$$

$$(3) \quad - \frac{2\alpha}{p^2 + 2\alpha p + \omega_{II_0}^2} i_{L_2}(0) = \frac{2\alpha p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_{II_0}^2}\mathcal{L}i_E(t') = \frac{A(p)}{B(p)\,C(p)}, \text{ unde}$$

$$Li_E(t') = Li(t') + CU_C(0) - \frac{i_L(0)}{p}.$$

Rădăcinile ecuației $B(p) = p^2 + 2\alpha p + \omega_{II_0}^2 = 0$ sînt :

$$(3') \quad p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_{II_0}^2} = -\alpha \pm \beta_{II}, \text{ cu } \beta_{II}^2 = \alpha^2 - \omega_{II_0}^2, \omega_{II_0}^2 = \frac{1}{L_2 C}.$$

Condițiile inițiale sînt :

$$(4) \quad \begin{cases} i_L(0) = i_L(t')|_{t'=0} = i_{LI}(t_m) = i_{LI}(t_A), \\ U_C(0) = U_C(t')|_{t'=0} = U_{CI}(t_m) = U_{CI} \end{cases} (t_A), i_{II}(t') = \begin{cases} 0, & t < t_A;\ t > t_D, \\ i_{II}(t'), & t_A < t < t_D t. \end{cases}$$

$\mathcal{L}i_E(t')$ constituie expresia operațională a curentului echivalent ce acționează în cazul CDFRP funcționînd în regim tranzitoriu (la tensiuni medii) și depinde de $i_{II}(t') = [i(t) - i_L(t) - i_C(t) - i_R(t)]_{t=t_m} = i(t_A) - i_{L_A} - C\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_A} - \frac{1}{R}u(t)\Big|_{t_A}$ (punctul A definit în fig. 3). Într-o primă aproximație se poate ține seama numai de $u_p(t)$ de pe porțiunea (I) a semnalelor răspuns mici. După o primă determinare se poate relua, într-o nouă iterație, calculul cu expresia semnalului $u(t)$ pe porțiunea (II).

Determinarea semnalului de regim permanent $u_{IIp}(t)$ se poate face și înainte de cunoașterea regimului tranzitoriu pe porțiunea (II), pe cale grafo-analitică (fig. 3), cunoscîndu-se timpurile de comutație t_A și t_D (în mod aproximativ). Întrucît pe porțiunea (II) de funcționare (semnal răspuns mediu) CDFRP este considerat liniarizat, fiind alimentat de un semnal nesinusoidal, atunci răspunsul $u(t)$, în regim tranzitoriu, poate fi conceput, de asemenea, ca o suprapunere a termenilor corespunzători regimului permanent și regimului liber, $u(t) = u_p(t) + u_l(t)$ și care va coincide cu originalul relației (3).

Componenta de regim permanent, $u_{IIp}(t) = u_p(t) = -u_p(t + T/2)$, se poate descompune în serie F o u r i e r, ținînd seama că;

$$(5) \quad u_p(t) = \begin{cases} Z_1 I_m \sin \omega t, & 0 < t < t_A, \quad t_D < t < T/2; \\ Z_2 I_m \sin \omega t + U_{II_0}, & t_A < t < t_D, \quad U_{II_0} \approx U_{B_m} - Z_2 I_{B_m}. \end{cases}$$

Prin urmare :

$$(6) \quad u_p(t) = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}U_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots \approx$$
$$\approx \sqrt{2}\,U_p \sin(\omega t + \varphi_{i_2} - \varphi_2), \text{ cu } \sqrt{2}\,U_p = \sqrt{2}U = U_m,\ \varphi_i - \varphi_1 = \varphi_{i_2} - \varphi_2.$$

Semnalul răspuns $u(t)$ în CDFRP funcţionînd în regim tranzitoriu, la semnale răspuns medii, poate avea componenta liberă $u_l(t)$: 1° aperiodică, 2° aperiodică critică, 3° oscilantă, după natura rădăcinilor ecuaţiei $B(p) = 0$ (rel.(3′)).

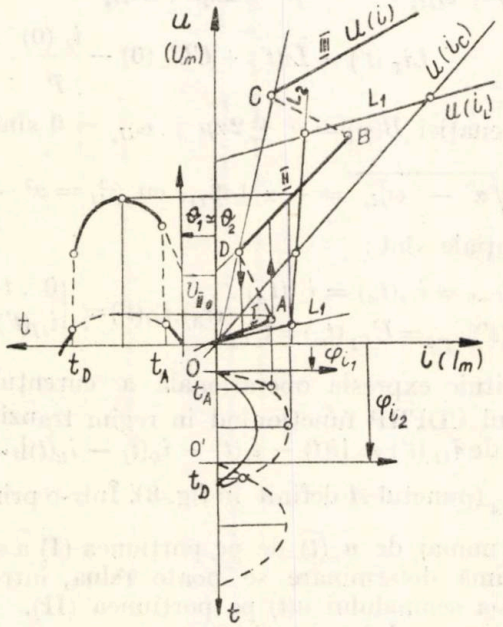


Fig. 3

Întrucît cele mai folosite circuite ferorezonante în tehnică sînt cu pierderi reduse (pentru care regimul tranzitoriu este mai evident) se studiază în continuare numai cazul cînd componenta liberă $u_l(t')$ este oscilantă.

3.1. Studiul regimului tranzitoriu în CDFRP oscilant

În acest caz parametrii CDFRP îndeplinesc condiţiile: $R = R_{cr_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_2}{C}} < R_{cr_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C}}$, $\beta_{II} = j\omega_{II} = \sqrt{\omega_{II_0}^2 - \alpha^2}$, $\omega_{II_0} < \omega$, deci componenta liberă oscilează cu pulsaţia ω_{IIp}, $(\omega_{IIp} < \omega_{II_0} < \omega)$.

Soluţia $u(t)$ în regim tranzitoriu oscilant, va fi de forma:

$$u(t) = \sqrt{2}U_{IIp}\sin(\omega t + \varphi_{i_2} - \varphi_2) + A_1 e^{-\alpha t}\sin(\omega_{IIp} t' + A_2) = u_{IIp}(t') + u_{II_l}(t'), \tag{7}$$

cu

$$\sqrt{2}\, U_{IIp} = U_m.$$

Expresiile A_1 și A_2 (rel. (7)) sînt determinate în condițiile inițiale $t' = 0$, furnizate de funcționarea CDFRP în regim tranzitoriu pe porțiunea (I) (semnale răspuns slabe), la $t = t_A$:

$$A_1 \sin A_2 = -[\sqrt{2}\, U_{IIp} \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2) - u_{C_{I_3}}(t_A)] \approx -[U_{II_0} +$$
$$+ U_{m_2} \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2) - u_{C_{I_3}}(t_A)] \approx [\Delta U + Z_2 I_m \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2)] = B_1,$$
$$\Delta U = U_{II_0} - u_{C_{I_3}}(t_A);$$

(8)
$$A_1 \cos A_2 = \frac{1}{\omega_{II_0} C}[I_m \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2}) - i_{L_{I3}}(t_A) - i_{II}(t')|_{t'=0} -$$
$$- \sqrt{2}\sqrt{\omega^2 C^2 + G^2} U_{IIp} \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2 + \operatorname{arctg} \omega RC) - \alpha C B_1] = B_2$$

și deci:

$$A_1 = B_1\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 A_2}, \quad A_2 = \operatorname{arctg}\frac{B_1}{B_2},$$

(8′)
$$\operatorname{ctg} A_2 \simeq \frac{\alpha}{\omega_{IIp}} + \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 + G^2}\, U_{IIp} \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2 - \operatorname{arctg} \omega RC)}{\omega_{IIp} C[\Delta U + Z_2 I_m \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2)]} -$$
$$- \frac{I_m \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2}) + i_{L_{I3}}(t) + i_{II_0}}{\omega_{IIp} C[\Delta U + Z_2 I_m \sin(\omega t_A + \varphi_{i_2} - \varphi_2)]}.$$

În cazul în care CDFRP are pierderi foarte mici, (rel. (8)), se pot admite aproximațiile:

$$\omega t_A + \operatorname{arctg}\, \omega RC = \omega t_A + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_{II_0}} \approx \frac{\pi}{2},\ \omega t_A \approx 0,\ i_{II}(t')_{t'=0} \approx 0,\ G \approx 0,$$

care nu afectează calitativ rezultatele.

Funcționarea CDFRP oscilant, în regim tranzitoriu, la tensiuni de ieșire medii, pune în evidență apariția unor supratensiuni care depind în mod esențial de regimul tranzitoriu desfășurat pe prima porțiune a caracteristicii V—A rezultante a circuitului (fig. 3), prin intermediul condițiilor inițiale $u_C(t')|_{t'=0}$ și $i_{L_2}(t')|_{t'=0}$ dar și de parametrii și semnalele de regim permanent de pe porțiunea (II).

Elongația maximă a semnalului răspuns în CDFRP, $u_{max}(t)$, depinde atît de ordinul subarmonicii ω_{IIp} cît și de amplitudinea ei. Cînd subarmonica ω_{IIp} are valoarea minimă (fig. 4) și $t'_{lm} < t'_D$, atunci în CDFRP apare supratensiunea răspuns maximă $u_{max}(t)$. Se are în vedere că pentru $t = 0$:

(9) $\varphi_i - \varphi_1 = 0,\ u_{l_{I_3}}(t_A) = U_p(t_A) + A_1 \sin A_2,\ A_1 \sin A_2 < 0,\ A_1 > 0,\ A_2 < 0,$

încît:

$$(10)\quad \begin{cases} \omega t + \varphi_i - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}, \quad t_{mp} = t'_{mp} + t_A = \dfrac{T}{4} - \dfrac{\varphi_i - \varphi_1}{\omega}, \\ \omega_{IIp} t' + A_2 - \theta_6 = 0, \quad t'_{ml} = \dfrac{\theta_6 - A_2}{\omega_{IIp}} = \dfrac{\pi}{2\omega_{IIp}} - \dfrac{A_2}{\omega_{IIp}}, \\ \operatorname{tg}\theta_6 = \dfrac{\omega_{IIp}}{\alpha} \approx \dfrac{\pi}{2}, \quad A_2 < 0. \end{cases}$$

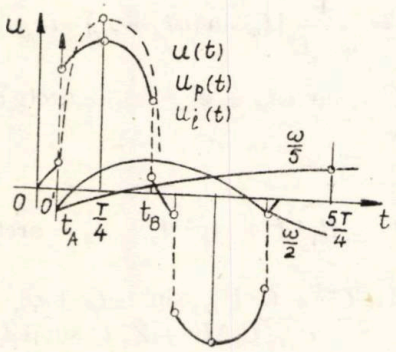


Fig. 4

Dacă $\omega_{IIp} = \omega/2$ (subarmonica a doua), atunci $T/4 < t'_m < T/2$ cînd sînt îndeplinite condiţiile: $\varphi_1 = \varphi_i \approx \pi/2$, $t'_{mp} = T/4 - t_A$. Prin urmare:

$$(11)\qquad t'_{ml} = \frac{\theta_6 - A_2}{\omega_{IIp}} = \frac{2(\theta_6 - A_2)}{\omega} \approx \frac{T}{2}, \qquad t'_m \approx \frac{t'_{ml} + t'_{mp}}{2} = \frac{3T}{8}.$$

Elongaţia maximă $u_{\max}(t) = u(t'_m)$ va fi:

$$(12)\qquad \begin{aligned} u(t'_m) &= U_m \sin\left(\omega\frac{3T}{8} + \varphi_{i_0} - \varphi_2\right) + A_1 e^{-3\alpha T/8}\sin\left(\omega_{IIp}\frac{3T}{8} + A_2\right) \approx \\ &\approx U_{II_0} + \frac{\sqrt{2}}{2} Z_2 I_m + A_1 \sin\frac{3\pi}{8} = U_m(1+\lambda), \end{aligned}$$

cu

$$(13)\qquad \lambda = \frac{A_1}{U_{IIm}}\sin\frac{3\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}\cdot\frac{Z_2 I_m}{U_{IIm}}, \quad \frac{U_{IIm}}{I_m} = Z_{II} > Z_2, \quad \frac{Z_2 I_m}{U_{IIm}} \ll 1.$$

Supratensiunea în CDFRP oscilant, λU_m, funcţionînd în regim tranzitoriu pe porţiunea (II) (fig. 3), depinde de valoarea maximă a componentei de regim liber $u_i(t')$ (unde A_1 are valoarea maximă pentru un CDFRP cu

parametrii cunoscuți cînd φ_i ia valori în jur de 90°). Se pot obține supratensiuni în CDFRP oscilant și pentru alte subarmonice, dar mai puțin însemnate. Dacă se consideră subarmonica $\omega_{IIp} = \omega/5$ (fig. 4), atunci $u_{\max}(t) = u(t'_m)$ va deveni de forma:

$$(14)\quad u(t'_m) = U_m + A_1 e^{-5\alpha T/4} \sin\left(\omega_{IIp}\frac{5T}{4} + A_2\right) \approx U_m(1+\lambda),\ \lambda = \frac{A_1}{U_m} e^{-5\alpha T/4} \cos A_2,$$

unde însă λ se amortizează mult mai repede (în comparație cu λ dat de rel. (13)).

Deci pentru ca CDFRP, după dispariția regimului tranzitoriu, să funcționeze pe porțiunea (II) (fig. 3) la semnale (tensiuni) răspuns medii, trebuie să fie îndeplinită condiția:

$$(15)\quad (U_{II_0} + Z_2 I_m)(1+\lambda) < U_{II_0} + Z_2 I_{mB},\ \text{cu}\ I_m < \frac{I_{mB}}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{U_{II_0}}{Z_2}.$$

Pentru a îndeplini condiția (15) de funcționare în regim permanent la tensiuni medii, trebuie modificați parametrii circuitului și faza inițială a semnalului excitație, φ_i, în așa fel încît să se obțină pentru curentul sinusoidal de alimentare, valori efective reale cuprinse între limitele $I_{D_m} < I_{C_m} < I_A < I_{A_m}$. În CDFRP oscilant pulsația proprie este o subarmonică pe porțiunea (II) de funcționare și o armonică pe prima porțiune a caracteristicii V—A rezultante de funcționare (fig. 3).

Supratensiunile depind de ordinul subarmonicii (deci de parametrii circuitului) și de condițiile inițiale (în acest caz numai de φ_i întrucît se consideră $\psi(0) = 0$, $U_c(0) = 0$).

Dacă condiția (15) nu este îndeplinită ($u_{\max}(t) = u(t_m) > u_{Bp\max}(t)$) atunci se determină timpul t'_B, pentru declanșarea unui nou regim tranzitoriu, iar semnalul răspuns din circuit tinde către tensiuni ridicate.

Trecerea CDFRP de la funcționarea la tensiuni medii (II) la tensiuni ridicate (III) (fig. 3) este marcată în schema din fig. 2 prin comutarea întrerupătoarelor comandate K'_1 (se închide) și K_2 (se închide). La timpul de comutare $t'' = 0$, $(t = t_A - t_B)$, K''_1 se deschide iar inductivitatea dinamică L_2 trece în L_1 și în circuit apare un generator de curent $i_{III}(t'')$ care determină regimul permanent nesinusoidal ce se stabilește în circuit la $t'' \to \infty$.

Semnalul răspuns, în acest caz $u(t)$, se determină în mod similar.

Dacă se urmărește numai determinarea punctului de funcționare de regim permanent, ca urmare a regimului tranzitoriu ce are loc în CDFRP, atunci se poate renunța la determinarea analitică a semnalului răspuns de valoare ridicată (III).

4. Rezultate experimentale

Încercările experimentale pentru studiul regimului tranzitoriu în CDFRP s-au efectuat cu ajutorul schemei electrice din fig. 5, unde:

CS_1 — cheie sincronă (se comută sincron cu CS_2 și K_3), Rh — reostat în decade tip METRA, $10^{-1}...10^5\ \Omega$, ($\pm\ 0{,}1\%$), AM — amplificator magnetic tip ZK-15 ultraperm ($N_l = 2\times1850$ spire, $N_C = 1\,600$ spire), C—cutie de condensatoare în decade tip ULRICH.

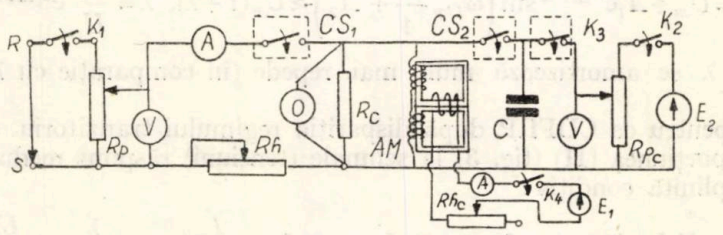


Fig. 5

Caracteristicile dinamice $i_L(u)$ (obținute la oscilograful O) sînt asemenea cu caracteristicile statice $I_{Lm}(U_m)$ sau $I_L(U)$ trasate în fig. 6. Din familia de caracteristici $I_L(U)$, trasate experimental, se aleg curbele A și respectiv B care intersectate cu caracteristica V—A a condensatorului liniar, $I_C(U)$, furnizează caracteristica rezultantă $I(U)$ a CDFRP (fig. 7), avînd un domeniu tristabil în regim permanent.

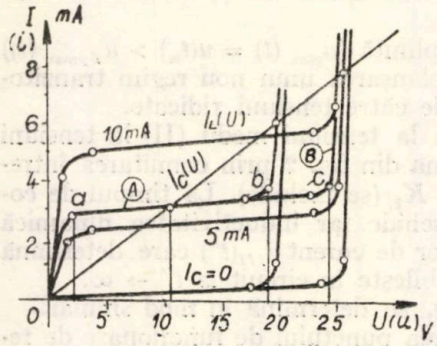


Fig. 6

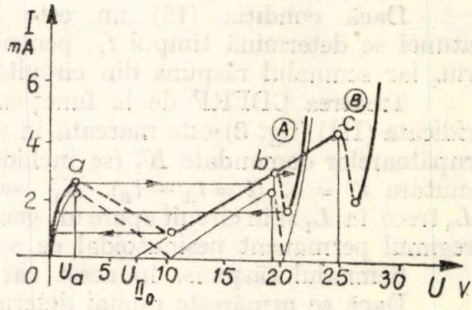


Fig. 7

Se efectuează, în continuare, studiul regimului tranzitoriu în CDFRP numai la variația fazei inițiale a semnalului excitație aplicat φ_i. Dacă bobina neliniară este utilizată în montaj de amplificator magnetic (fig. 5) atunci la cuplarea CDFRP la un semnal sinusoidal $i_L(0) = 0$, iar $U_C(0)$ nu se introduce în mod natural (bobina scurtcircuitînd condiția inițială a condesatorului).

Rezultatele experimentale obținute sînt trasate în fig. 8 și 9. Din fig. 8 rezultă că limitele domeniilor de funcționare, $I_{I,IIm}$, $I_{II,IIIm}$, depind de faza inițială și de parametrii elementelor din structura CDFRP. Prezintă de asemenea interes și dependența timpurilor de comutare t_m, t'_m de condițiile inițiale (fig. 9).

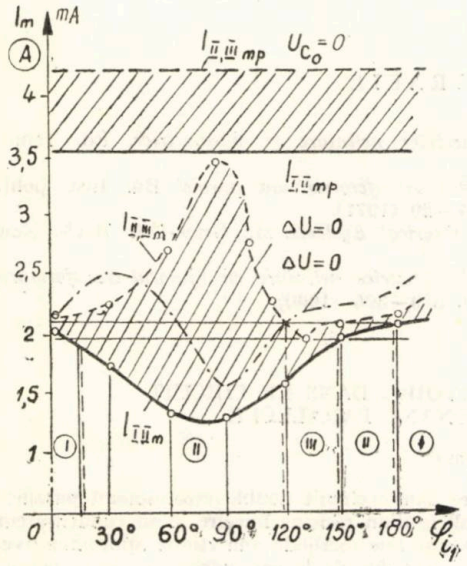


Fig. 8

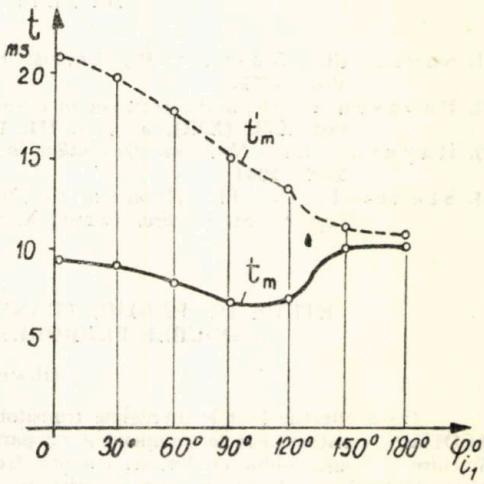


Fig. 9

5. Concluzii

1. CDFRP funcționînd în regim tranzitoriu poate prezenta un domeniu tristabil sau două domenii bistabile (ca și în regim permanent), ale căror limite depind, însă, pe lîngă parametrii din circuit și de semnalele și condițiile inițiale (rel. (15) și respectiv fig. 8).

2. Studiul teoretic și experimental al CDFRP în regim tranzitoriu pune în evidență faptul că, pentru pierderi reduse în circuit, funcționarea statică (în care valoarea maximă a semnalului aplicat, respectiv parametrii variază foarte lent), diferă esențial de cea dinamică (mult mai întîlnită în practică).

3. Studiul regimului tranzitoriu în CDFRP precizează folosirea acestor circuite în regim permanent, punînd în evidență și noi posibilități de utilizare ca:

a) element logic bistabil sau tristabil comandat prin condițiile inițiale;

b) element traductor de defazaj între două semnale $u(t)$, $i(t)$ pe caracteristica $I_m(\varphi_i)$ (fig. 8).

4. Analiza regimului tranzitoriu în CDFRP prezintă interes în studiul supratensiunilor din instalaţiile industriale care conţin bobine neliniare în paralel cu condensatoare liniare (cum ar fi reţelele electrice, circuitele de comandă a tiristoarelor etc.).

Primită la 24 iulie 1973

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Bazele electrotehnicii
şi măsurări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Savin Gh., Rosman H., *Circuite electrice neliniare şi parametrice.* Ed. Tehn., Buc., 1973.
2. Popescu I., *Regimul tranzitoriu în circuitul dubluferorezonant paralel.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *3—4*, s. III, 17—29 (1971).
3. Hayashi Ch., *Nonlinear Oscillation in Physical Systems.* Mc Graw-Hill Book, New York, 1964.
4. Stănciulescu Fl., *Rezolvarea circuitelor electrice neliniare cu ajutorul transformării Laplace.* St. şi cerc. Energ., X, *2*, 389—396 (1960).

ÉTUDE DU RÉGIME TRANSITOIRE DANS LE CIRCUIT DOUBLE FERRORÉSONANT PARALLÈLE

(Résumé)

On a effectué l'étude du régime transitoire dans le circuit double ferrorésonant parallèle (CDFRP), constitué par le groupement en parallèle d'un résistor linéaire, d'un condensateur linéaire et d'une bobine nonlinéaire commandée, par une méthode analytique approximative. Cette méthode est basée sur une linéarisation convenable de la caractéristique de la bobine commandée en c. c., réalisée par sous-intervalles.

Les résultats théoriques obtenus sont présentés comparativemént aux résultats expérimentaux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

D. K.621.314.263

ARBEITSWEISE DES FERROMAGNETISCHEN FREQUENZVERZWEIFACHER IM SUBHARMONISCHEN VORGANG *)

VON

NORBERT ZITRON und M. ANTONESCU

In der Fachliteratur über Schwingungen in nichtlinearen Kreisen haben die Forschungen die sich mit den subharmonischen Schwingungen beschäftigen eine besondere Rolle. Das Interesse ist, in erster Reihe, der praktischen Anwendungsmöglichkeiten solcher Schwingungen besonders in der Rechentechnik, zu verdanken [1], [2].

Die Erzeugung von subharmonischen Schwingungen ist in nichtlinearen resonanten Kreisen, die ein nichtlineares parametrisches Element enthalten, die die Energieübertragung von einer Frequenz auf einer anderer, entschprechend der allgemeinen energetischen Beziehungen von M a n l e y - R o w e, zulassen, möglich [3].

Die Erregungsmöglichkeit der Unterschwingungen im ferromagnetischen Frequenzverzweifacher, dessen Ausgangskreis eine Kapazität enthält, wurde in der Arbeit [4] gezeigt.

In vorliegender Arbeit wird theoretisch und erfahrungmäßig die Erregung der zweiten Unterschwingung im ferromagnetischen Frequenzverzweifacher untersucht.

2. Arbeitsweise des Frequenzverzweifachers auf der zweiten Unterschwingung

Die zu untersuchende Anlage (Abb. 1) besteht aus zwei gleiche ferromagnetische Kerne auf welchen sich mehrere Wicklungen und zwar: zwei Primärwicklungen mit den Windungszahlen w_1, in Reihe additional geschaltet und von einer sinusförmiger Spannung gespeist, zwei Sekundärwicklungen mit den Windungszahlen w_0, in Reihe differentiel gebunden und vom Gleichstrom durchfloßen, endlich der Resonanzkreis im welchen sich die Unterschwin-

*) Mitgeteilt an der wisenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Cluj, 2.—3. April 1971.

gungen erregen, der gleichfalls zwei Wicklungen, jede mit der Windungszahl w_2, enthält, die in Reihe gebunden sind und in Parallel mit einem Kondensator C und einem Widerstand R geschaltet, befinden.

Die weiteren Betrachtungen werden unter folgenden Voraussetzungen:

a) Die Kernehysteresis wird vernachlässigt, derer Kennlinien seiend durch das unvollständige Polynom drittes Grades:

$$i = k_1\Phi + k_3\Phi^3 \tag{1}$$

annäherendbar.

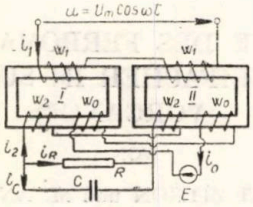


Fig. 1

b) Die Wicklungswiderstände werden vernachlässigt.

c) Das Anschließen der sinusförmigen Spannung $U_m \cos \omega t$ findet bei der Zeit $t = 0$ statt, durchgeführt.

In diesen Bedingungen folgen für den Frequenzverzweifacher folgende Gleichungen:

$$w_1 \frac{d(\Phi_I + \Phi_{II})}{dt} = U_m \cos \omega t, \tag{2}$$

$$i_2 + i_R + i_C = 0, \tag{3}$$

$$w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_0 i_0 = k_1 \Phi_I + k_3 \Phi_I^3, \tag{4}$$

$$w_1 i_1 - w_2 i_2 - w_0 i_0 = k_1 \Phi_{II} + k_3 \Phi_{II}^3. \tag{5}$$

Berücksichtigend daß:

$$i_C = C w_2 \frac{d^2(\Phi_I - \Phi_{II})}{dt^2}, \quad i_R = \frac{1}{R} w_2 \frac{d(\Phi_I - \Phi_{II})}{dt}, \tag{6}$$

dann ergibt sich:

$$C w_2 \frac{d^2(\Phi_I - \Phi_{II})}{dt^2} + \frac{1}{R} w_2 \frac{d(\Phi_I - \Phi_{II})}{dt} + i_2 = 0. \tag{7}$$

Aus Gleichung (2) erhält man:

$$\Phi_I + \Phi_{II} = \Phi_m \sin \omega t, \tag{8}$$

wobei $U_m/\omega w_1 = \Phi_m$.

Wird die Bezeichnung:

(9) $$\Phi_I - \Phi_{II} = y + \Phi_0$$

eingeführt, dann kann man aus den Gleichungen (8) und (9) die Ausdrücke der Flüße Φ_I und Φ_{II}:

(10) $$\Phi_I = \frac{1}{2}(\Phi_m \sin \omega t + y + \Phi_0),\ \Phi_{II} = \frac{1}{2}(\Phi_m \sin \omega t - y - \Phi_0]$$

erhalten. Diese ermöglichen mittels (4) und (5):

(11) $$w_2 i_2 + w_0 i_0 = \frac{1}{2}[k_1(\Phi_I - \Phi_{II}) + k_3(\Phi_I^3 - \Phi_{II}^3)]$$

zu bestimmen.

Aus (11) folgt der Ausdruck des Stroms i_2:

(12) $$i_2 = -\frac{1}{w_2}\left(w_0 i_0 - \frac{k_1}{2}\Phi_0 - \frac{3}{16}k_3\Phi_0\Phi_m^2 - \frac{1}{8}k_3\Phi_0^3\right) + \\ + \frac{1}{2w_2}\left(k_1 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0^2 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0 y^2 + \frac{1}{4}k_3 y^3 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4}k_3 y\Phi_m^2 \sin^2\omega t - \frac{3}{8}k_3\Phi_0\Phi_m^2 \cos 2\omega t\right).$$

Unter der Voraussetzung $i_2 = 0$ kann man durch Einsetzung von (10_1) in (4) die konstante Durchflutung $w_0 i_0$:

(13) $$w_0 i_0 = \frac{k_1}{2}\Phi_0 + \frac{3}{16}k_3\Phi_0\Phi_m^2 + \frac{k_3}{8}\Phi_0^3$$

rechnen.

Es folgt:

(14) $$i_2 = \frac{1}{2w_2}\left(k_1 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0^2 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0 y^2 + \frac{1}{4}k_3 y^3 + \frac{3}{4}k_3 y\Phi_m^2 \sin^2\omega t - \right. \\ \left. - \frac{3}{8}k_3\Phi_0\Phi_m^2 \cos 2\omega t\right).$$

Setzt man jetzt (16) in (7) ein und berücksichtigend auch (10) ergibt sich die Gleichung:

(15) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2w_2^2 C}\left(k_1 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0^2 y + \frac{3}{8}k_3\Phi_m^2 y + \frac{3}{4}k_3\Phi_0 y^2 + \frac{1}{4}k_3 y^3 - \right. \\ \left. - \frac{3}{8}k_3 y\Phi_m^2 \cos 2\omega t\right) = \frac{3}{16w_2^2 C}k_3\Phi_0\Phi_m^2 \cos 2\omega t.$$

Um das Schreiben zu vereinfachen und die Ergebnisse zu verallgemeineren wird die Gleichung (15) normiert. Es folgt:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\delta\frac{dx}{d\tau} + \Delta x + \beta x^2 + \gamma x^3 - \mu\cos 2\nu\tau = A\cos 2\nu\tau, \tag{16}$$

wobei man:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0^2 = \dfrac{k_1 + \frac{3}{4}k_3\Phi_0^2}{2\pi_2^2 C}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad y = x\Phi_m, \quad \dfrac{3k_3\Phi_m^2}{16\pi_2^2 C\omega_0^2} = \mu, \quad \dfrac{1}{2RC\omega_0} = \delta, \\ \dfrac{3k_3\Phi_0\Phi_m}{8\pi_2^2 C\omega_0^2} = \beta, \quad \dfrac{k_3\Phi_m^2}{8\pi_2^2 C\omega_0^2} = \gamma, \quad \dfrac{3k_3\Phi_0\Phi_m^2}{16\pi_2^2 C\omega_0^2} = A, \quad \omega_0^2 + \mu = \Delta, \quad \dfrac{\omega}{\omega_0} = \nu \end{array}\right. \tag{17}$$

bezeichnete.

Die Gleichung (16) erlaubt die analytische Untersuchung der Unterschwingungen im magnetischen Frequenzverzweifacher.

Für die weitere Untersuchung der Gleichung (16) ist die Substitution:

$$x = x' - \frac{\beta}{3\gamma}, \tag{18}$$

die die Gleichung (16) zur Form:

$$\frac{d^2x'}{d\tau^2} + 2\delta\frac{dx'}{d\tau} + \eta x' + \gamma x'^3 - \mu x'\cos 2\nu\tau = B\cos 2\nu\tau + B_0 \tag{19}$$

führt, zweckmäßig. Der konstante Term und die neuen Koeffizienten haben die Bedeutungen:

$$\Delta - \frac{\beta^2}{3\gamma} = \eta, \quad A - \frac{\mu\beta}{\gamma} = B, \quad \frac{\Delta\beta}{3\gamma} - \frac{2\beta^3}{27\gamma^2} = B_0. \tag{20}$$

Es wird der Lösungsansatz:

$$x' = z + a\sin\nu\tau + b\cos\nu\tau + w\cos 2\nu\tau, \tag{21}$$

wobei man für die Amplitude der zweiten Harmonischen, mit guter Annäherung, $w = -\frac{1}{3}B$ [1] schreiben kann, gemacht.

Werden die Lösung (21) und ihre Ableitungen in der Gleichung (19) eingeführt, dann erlangt man nach Identifizierung zu den folgenden drei Gleichungen:

$$\left(D - \frac{\mu}{2}\right)a + 2\delta\nu b = -3\gamma awz, \tag{22}$$

$$2\delta\nu a - \left(D + \frac{\mu}{2}\right) b = -3\gamma b w z, \tag{23}$$

$$\eta z + \gamma\left[z\left(z^2 + \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{2}w^2\right) - \frac{3}{4}w(a^2 - b^2)\right] - \frac{\mu w}{2} = B_0, \tag{24}$$

wobei für Vereinfachung man:

$$\nu^2 - \eta - \gamma\left(\frac{3}{4}r^2 + 3z^2 + \frac{3}{4}w^2\right) = D \tag{25}$$

bezeichnete.

Durch Beseitigung von a und b zwischen den Gleichungen (22) und (23) erhält man eine Rechnungsgleichung für z in Abhängigkeit von der Amplitude r der gesuchten Unterschwingung:

$$4\delta^2\nu^2 + D^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{3\gamma w z \mu}{4} = (3\gamma w z)^2. \tag{26}$$

Werden noch einmal die Gleichungen (22) und (23) für die Beseitigung von a und b aus (27) benützt, dann ergibt sich:

$$\eta z + \gamma\left[z\left(z^2 + \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{2}w^2\right) + \frac{3wDr^2}{12\gamma w z - 2\mu}\right] - \frac{\mu w}{2} = B_0, \tag{27}$$

aus welcher man den Ausdruck der Amplitude r:

$$r = \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu w}{2} + B_0 - \eta z - \gamma z^3 - \frac{3}{2}\gamma z w^2\right)(12\gamma w z - 2\mu)}{3\gamma(wD + 6\gamma z^2 w - \mu z)}} \tag{28}$$

bestimmen kann.

So erhält man:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta, & r\cos(\theta + \pi), \\ b = r\sin\theta, & r\sin(\theta + \pi), \end{cases} \tag{29}$$

die Anfangsphase der Unterschwingung seiend von:

$$\sin 2\theta = \frac{-(3\gamma w z)^2 - D^2 + \mu^2/4}{4\nu\delta(3\gamma w z + \mu/2)} \tag{30}$$

gegeben.

Wird die Gleichung (28) analysiert so erlangt man zur Folgerung, daß die Amplitude der zweiten Unterschwingung vom Kernwerkstoff, von der Amplitude und Kreisfrequenz der Speisungsspannung, vom Steuerungsgleichstromswert und von den Resonanzkreisparametern (R, C) abhängig ist.

Die Betrachtung der Gleichungen (29) und (30) hebt die Möglichkeit der Existenz von zwei verschiedenen Schwingungsphasen, die sich um π unterscheiden und die Abhängigkeit derer Phasen von den gleichen Größen und Parametern die die Amplitude einflüßen und, noch mehr, auch von der Amplitude selbst, heraus.

3. Erfahrungsmäßige Ergebnisse

Die erfahrungsmäßigen Versuche wurden an hand von einem Frequenzverzweifacher mit Kernen aus Permalloy durchgeführt. Diese Versuche haben die theoretische Abhängigkeiten der zweiten Unterschwingungsamplitude von den weiter oben erwähnten Parametern geprüft.

In Abb. 2...4 sind die Kennlinien $U_2(C)$, $U_2(R)$ und $U_2(i_0)$, wobei U

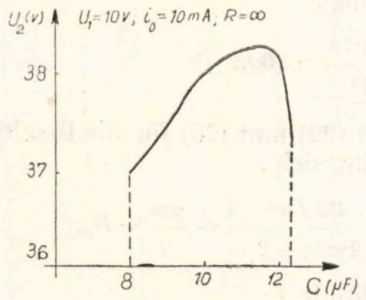


Abb. 2

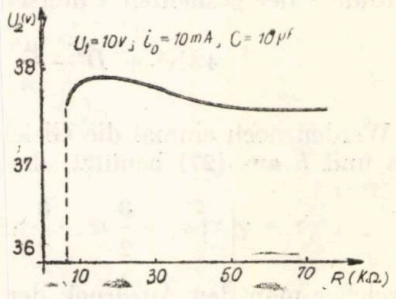


Abb. 3

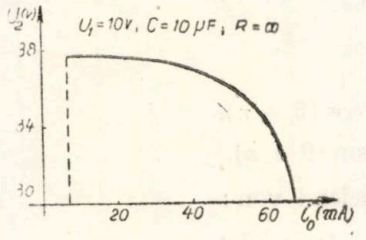


Abb. 4

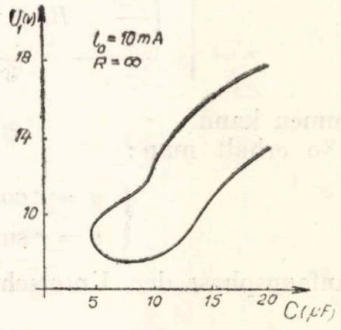


Abb. 5

der Effektivwert der erregten Unterschwingung ist, dargestellt. Man stellt, daß der Effektivwert U_2 sich bei Überschreiten eines bestimmten Parameternwertes verkleinert, sowie auch daß der Einfluß der Kapazität und des Gleichstroms viel stärker auf U_2 als der Einfluß von R ist, fest. Dafür ist es ersichtlich, daß die Unterschwingung für ein sehr breiten Wertesbereich von R, der bis zum Unendlichen geht, existiert.

Die Existenzbereiche der erregten Unterschwingung $U_1(C)$, $U_1(i_0)$ und $U_1(R)$ sind in Abb 5...7 gezeigt. Man stellt, daß die Existenzbereiche in Abhängigkeit von C und R offen sind, während der in Abhängigkeit von i_0 geschloßen ist, fest.

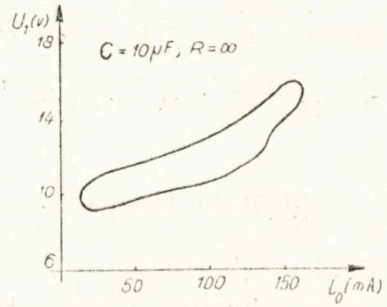


Abb. 6

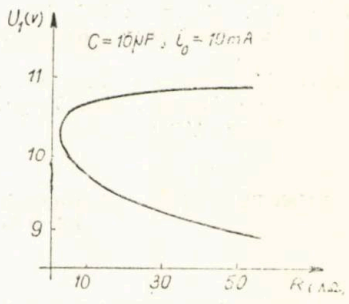


Abb. 7

Es wurde erfahrungsmäßig auch die Existenz der zwei distinkten Schwingungsphasen, die sich um π unterscheiden, derer Anwesenheit von den Anfangsbedingungen abhängig ist, geprüft.

Die erfahrungsmäßigen Untersuchungen zeigten gleichzeitig die Erregungsmöglichkeit der Unterschwingungen 1/2, 1/3,..., die die theoretischen Betrachtungen gemäß deren solche Unterschwingungen wenn die Nichtlinearität unsymetrisch ist erscheinen können bestätigen. Die analytische Behandlung solcher Probleme ist der weiter oben gezeigten ähnlich.

4. Schlußfolgerungen

Die Anwendung des Frequenzverzweifachers als Frequenzteiler hat den Vorteil eines einfachen Aufbaus, leicht zu Verwirklichen, in den sich leicht eine Schwingung mit der Kreisfrequenz der Speisungsspannung die zwei verschiedene Schwingungsphasen, die sich um π unterscheiden präsentiert, erregt. Das ermöglicht die Verwendung des Kreises als phasologisches Element mit zwei stabilen Zuständen.

Man erlangt die ganze Reihe von Unterschwingungen der Kreisfrequenz 2ω, ($2\omega/2$, $2\omega/3$, $2\omega/4$,...), also die erhaltene Unterschwingungsreihe viel dichter als wie beim klassischen Frequenzteiler (Parametron) ist.

Die untersuchte Unterschwingung (1/2) hat Existenzbereiche die von der Speisungsspannung, von den Resonanzkreisparametern und vom Kernwerkstoff abhängig sind. Die Amplitude dieser Unterschwingung ist von den selben Faktoren beeinflußt.

Eingegangen am 25. September 1973

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl fur Grundlagen der Elektrotechnik
und Elektrische Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Hayashi C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* Mc Graw-Hill, New York, 1964.
3. Manley J. M., Rowe M. E., *Some General Properties of Nonlinear Elements.* Part I. *General Energy Relations.* Proc. IRE, **44**, 7, 904—913 (1956).
4. Savin Gh., Zitron N., Cîrțină Gh., *Über die Frequenzteilung auf der Grundlage nichtlinearer Kreise.* XIII. Intern. Wiss. Koll., T. H. Ilmenau, 97—105 (1968).
5. Zitron N., Antonescu M., *Der einphasige ferromagnetische Frequenzverdreifacher im subharmonischen Vorgang.* Bul. Inst. polit. Iași, s. III, **XVII (XXI)**, *1—2*, 9—18 (1971).

FUNCȚIONAREA DUBLORULUI FEROMAGNETIC DE FRECVENȚĂ ÎN REGIM SUBARMONIC

(Rezumat)

Se analizează teoretic și experimental excitarea subarmonicii a doua în dublorul feromagnetic de frecvență avînd un condensator în circuitul de sarcină.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C.Z. 621.318.435

STUDIUL FUNCȚIONĂRII BOBINEI NELINIARE COMANDATE ORTOGONAL, EXCITATĂ PRIN FLUX SINUSOIDAL, ÎN REGIM DE MAGNETIZARE LIBERĂ ȘI FORȚATĂ *)

DE

DANA BALAN

1. Generalități

Comportarea bobinei neliniare cu miez feromagnetic este determinată de natura și forma semnalului excitație. Un interes deosebit îl prezintă funcționarea în două regimuri limită: la curent sinusoidal și la flux sinusoidal.

În studiul grafic sau analitic al acestui element de circuit se introduc următoarele ipoteze simplificatoare:

a) Materialul miezului feromagnetic se consideră omogen și izotrop.

b) Caracteristica de magnetizare a miezului este admisă univocă și aproximabilă printr-un polinom incomplet de gradul trei

$$i = k_1\varphi + k_3\varphi^3. \tag{1}$$

c) Rezistențele înfășurărilor se consideră practic nule.

Pentru îmbunătățirea și diversificarea caracteristicilor, în scopul unor aplicații practice, se utilizează procedeul de premagnetizare în curent continuu. Dacă fluxurile creeate de curentul alternativ (de lucru) și continuu (de comandă) au aceeași direcție în miezul feromagnetic comanda se numește longitudinală. Dacă direcțiile celor două fluxuri sînt perpendiculare se realizează comanda ortogonală.

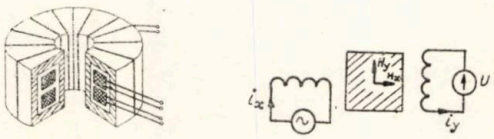
Bobina neliniară comandată longitudinal (BNCL) are numeroase aplicații în practică și este studiată amănunțit în literatura de specialitate.

Bobina neliniară comandată ortogonal (BNCO), datorită dificultăților de realizare practică, a preocupat un număr restrîns de cercetători, deși prezintă avantajul utilizării unui singur miez și posedă unele proprietăți deosebit de interesante la variația curentului de comandă [1], [2], [6], [8].

---

*) Prezentată la sesiunea științifică jubiliară „60 ani de învățămînt electrotehnic în Iași" 21—23 decembrie 1972.

În fig. 1 este reprezentată o BNCO astfel realizată încît atît fluxul creeat de curentul de lucru cît și cel produs de curentul de comandă să aibă posibilitatea de a se închide prin materialul miezului. Se pot folosi miezuri de tipul feritei oală, tor golit în interior, sau fereastră olandeză.



a *b*

Fig. 1

În ipotezele făcute mai sus, alegînd convenabil dimensiunile miezului și numărul de spire, ecuația (1) conduce pentru circuitul din fig. 1 *b* la următoarele expresii ale curenților [7], [5]:

(2) $$i_x = k_1\varphi_x + k_3(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\varphi_x, \qquad (3) \quad i_y = k_1\varphi_y + k_3(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\varphi_y,$$

unde i_x și i_y reprezintă valorile instantanee ale curenților în circuitul de lucru, respectiv de comandă, φ_x și φ_y — valorile instantanee ale fluxurilor creeate de acești doi curenți.

Dacă se consideră regimul de funcționare la flux sinusoidal, $\varphi_x = \Phi_{xm}\cos\omega t$, ca urmare a aplicării curentului continuu de comandă, pe direcția y va apare un flux $\varphi_{2y} = -\Phi_{2ym}\cos 2\omega t$. Explicația apariției acestui flux și a relației de fază dintre φ_x și φ_{2y} se găsește în literatura citată.

În cazul în care impedanța circuitului de comandă este redusă, armonica a doua va apare în spectrul curentului i_y, iar regimul de funcționare corespunzător este denumit *regim de magnetizare liberă*. Dacă armonica a doua se pune în evidență în fluxul φ_y, impedanța circuitului de comandă fiind de valoare ridicată, regimul de funcționare se numește *regim de magnetizare forțată* [3], [8].

Comportarea BNCO, excitată prin flux sinusoidal, în cele două regimuri, este calitativ asemănătoare, spre deosebire de BNCL, care prezintă diferențe esențiale între cele două regimuri [9].

2. BNCO excitată prin flux sinusoidal, în regim de magnetizare liberă

2.1. Considerații teoretice

În acest regim de funcționare, prin circuitul de comandă, de impedanță neglijabilă, circulă curentul i_y, care conține pe lîngă componenta continuă I_0 și o componentă alternativă care variază cu pulsația 2ω (i_{2y}). Dintre semnalele care intervin se cunosc:

(4) $$i_y = I_0 + i_{2y}, \qquad (5) \quad \varphi_x = \Phi_{xm}\cos\alpha, \qquad (6) \quad \varphi_y = \Phi_0,$$

unde $\Phi_{xm} = U_m/\omega n$ și $\alpha = \omega t$.

Înlocuind expresiile (5) și (6) în relația (2) se obține:

(7) $$i_x = b_1\varphi_x + b_3\varphi_x^3,$$

unde

(8) $$b_1 = k_1 + k_3\Phi_0^2, \qquad b_3 = k_3.$$

Relația (7) reprezintă ecuația caracteristicii de intrare a BNCO în regim de magnetizare liberă. Cu ajutorul acestei ecuații se pot obține caracteristicile de lucru ale BNCO ($i_x = f(\varphi_x)_{I_0 = \text{const.}}$) și caracteristicile de comandă ($i_x = g(I_0)_{\varphi_x = \text{const.}}$). Coeficientul b_1 nu depinde de semnul lui Φ_0, iar la creșterea acestui semnal crește și b_1, caracteristica apropiindu-se de axa curentului.

Relația (4) pune în evidență conținutul în armonice al curentului de comandă i_y și poate fi comparată cu relația (3), particularizată în acest regim de funcționare, anume:

$$(9) \qquad i_y = k_1\Phi_0 + k_3\Phi_0^3 + 0{,}5\,k_3\Phi_{xm}^2\,\Phi_0 + 0{,}5\,k_3\Phi_{xm}^2\,\Phi_0\cos 2\alpha = I_0 + i_{2y}.$$

Prin identificare se obține atît termenul constant:

$$(10) \qquad I_0 = (k_1 + 0{,}5\,\Phi_{xm}^2\,k_3)\,\Phi_0 + k_3\Phi_0^3,$$

cît și amplitudinea armonicei a doua a curentului:

$$(11) \qquad I_{2m} = 0{,}5\,k_3\Phi_{xm}^2\,\Phi_0.$$

Relația (10) permite trasarea caracteristicii $I_0(\Phi_0)$, cu Φ_{xm} drept parametru, care reflectă proprietățile materialului pe direcția cîmpului de comandă, precum și a caracteristicii $\Phi_0(\Phi_{xm})$, cu I_0 drept parametru.

Expresiile (7), (8), (10), obținute în acest paragraf, sînt esențiale pentru studiul funcționării BNCO în regimul de magnetizare liberă și pot fi utilizate corespunzător în procesele care apar în dispozitivele care conțin acest element neliniar.

Pentru a spori generalitatea rezultatelor se recurge la normarea ecuației (1). Semnalele la care se raportează curenții și fluxurile sînt cele corespunzătoare saturației, I_s, respectiv Φ_s. În cele ce urmează se folosesc următoarele semnale normate:

$$(12) \qquad \begin{cases} z = \dfrac{i_x}{I_s}, \quad z_0 = \dfrac{I_0}{I_s}, \\ x_m = \dfrac{\Phi_{xm}}{\Phi_s}, \quad y_0 = \dfrac{\Phi_0}{\Phi_s}, \quad y_{2m} = \dfrac{\Phi_{2ym}}{\Phi_s}, \quad y = \dfrac{\varphi}{\Phi_s}. \end{cases}$$

Ecuația (1) devine, în aceste condiții:

$$(13) \qquad z = c_1 y + c_3 y^3,$$

unde

$$c_1 = \frac{k_1\Phi_s}{I_s}, \quad c_3 = \frac{k_3\Phi_s^3}{I_s}, \quad b_1 = b_1', \quad b_3 = b_3'.$$

Pentru cazul tratat în cele ce urmează se consideră $c_1 = 0{,}2$ și $c_3 = 0{,}8$ și se particularizează în mod adecvat relațiile (7), (8) și (10).

Caracteristica de intrare (7) poate fi analizată atît la variația curentului de comandă, amplitudinea excitației fiind menținută constantă (caracteristicile de lucru $z(x)$ cu z_0 — parametru, fig. 2), cît și la variația ampli-

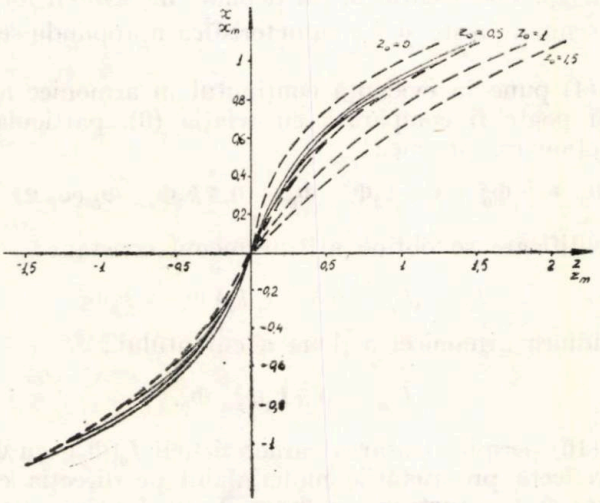


Fig. 2

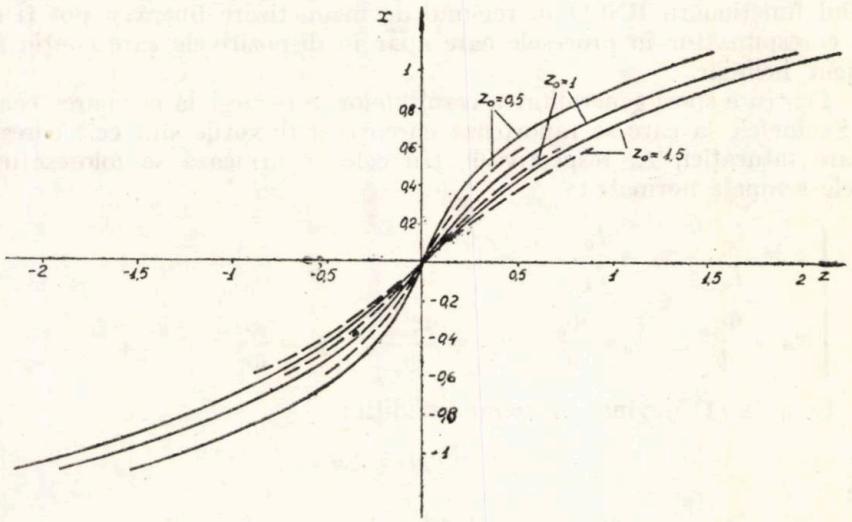


Fig. 3

tudinii fluxului excitație, curentul de comandă rămînînd constant (caracteristicile $z(x)$ cu x_m — parametru, fig. 3). În fig. 3 sînt reprezentate familiile caracteristicilor de lucru $z(x)$ pentru cazul în care $x_m = 1{,}1$ (linie continuă)

și $x_m = 0{,}6$ (linie întreruptă), parametrul z_0 avînd valorile : 0,5 ; 1 ; 1,5. Se constată că la aceleași valori ale curentului de comandă caracteristicile de lucru sînt mai coborîte în cazul în care amplitudinea fluxului excitație este situată cu mult sub nivelul de saturație. Acest fapt se datorează modificării componentei continue a fluxului, y_0 (fig. 4).

În fig. 5 este reprezentată variația pantei caracteristicii de intrare $b_1'(z_0)$, x_m fiind considerat parametru. În această familie apar porțiuni liniare care acoperă întregul interval de variație al curentului de comandă (z_0) permițînd obținerea unei dependențe liniare între z și z_0. Variația lui b_1' funcție de x_m, cu z_0 ca parametru, este reprezentată în fig. 6.

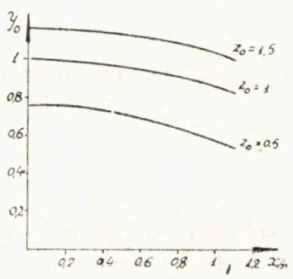


Fig. 4

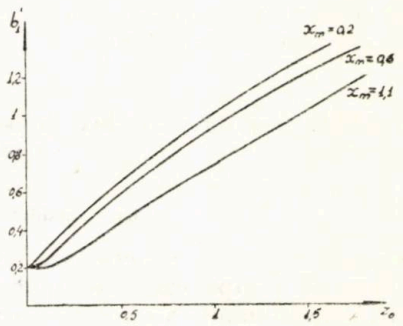


Fig. 5

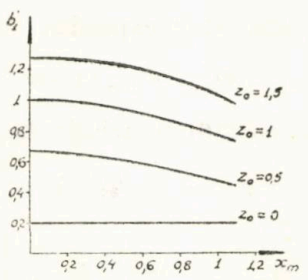


Fig. 6

Familia caracteristicilor de intrare $z(x)$, ridicată pentru diferite valori ale semnalului excitație (x_m), în cazul în care curentul de comandă este menținut constant, este reprezentată în fig. 2 cu linie continuă. Extremitățile acestor caracteristici descriu curba $z_m(x_m)$, pentru $z_0 = \text{const.}$, din care se poate deduce caracteristica în valori efective. Aceste caracteristici, trasate în valori maxime (familia trasată cu linie întreruptă), au de asemenea o singură neliniaritate, corespunzătoare saturației.

2.2. Rezultate experimentale

Oscilogramele au fost ridicate la frecvența de 800 Hz, dispozitivul fiind constituit dintr-o ferită oală cu două înfășurări interioare de lucru și de măsură, precum și una toroidală, în exterior, de comandă.

În fig. 7 sînt redate oscilogramele corespunzătoare cazului în care curentul de comandă este nul (a — $\varphi_x(t)$ și $i_x(t)$, iar b — $\varphi_x(i_x)$).

În fig. 8 a sînt reprezentate aceleași semnale ca și în fig. 7 a, dar în prezența unui curent continuu de comandă. În acest caz $i_x(t)$ se apropie de o sinusoidă, ca urmare a liniarizării caracteristicii.

În fig. 8 b, la același curent de comandă, este redată caracteristica $\varphi_x(i_x)$ comparativ cu cea obținută în absența comenzii. Caracteristica este liniară în origine, se apropie de axa curentului iar aria ciclului se micșorează.

Oscilogramele comparate cu caracteristicile obținute teoretic indică o bună concordanță a rezultatelor.

3. BNCO excitată prin flux sinusoidal, în regim de magnetizare forțată

3.1. Considerații teoretice

În acest regim de funcționare curentul i_y, prin circuitul de comandă, conține numai componenta continuă I_0. În schimb fluxul care străbate înfășurarea de comandă va conține și armonica a doua, încît:

$$(14)\quad i_y = I_0, \qquad (15)\quad \varphi_y = \Phi_0 - \Phi_{2ym}\cos 2\alpha, \qquad (16)\quad \varphi_x = \Phi_{xm}\cos\alpha.$$

Dacă se folosește pentru flux expresia:

$$(17)\quad \varphi_y = \Phi_0 - \Phi_{2ym}(2\cos^2\alpha - 1)$$

și se înlocuiește împreună cu (16) în relația (2), se obține:

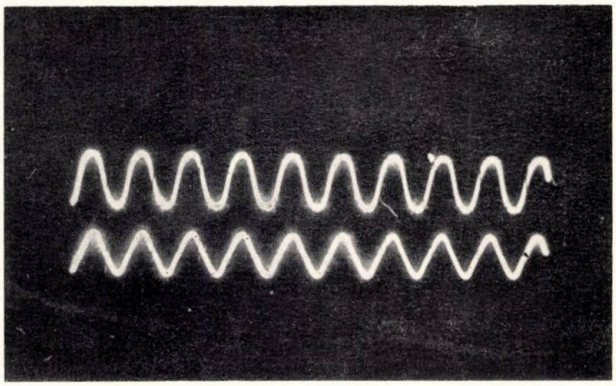
$$(18)\quad i_x = b_1\varphi_x + b_3\varphi_x^3 + b_5\varphi_x^5,$$

unde

$$(19)\quad b_1 = k_1 + k_3(\Phi_0 + \Phi_{2ym})^2, \qquad (20)\quad b_3 = k_3\left[1 - \frac{4\Phi_{2ym}}{\Phi_{xm}^2}(\Phi_0 + \Phi_{2ym})\right],$$

$$(21)\quad b_5 = k_3\frac{4\Phi_{2ym}^2}{\Phi_{xm}^4}.$$

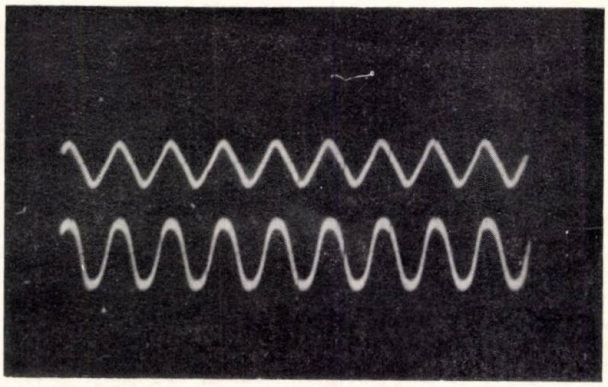
Coeficienții b_1, b_3 și b_5, determinați cu ajutorul relațiilor (19), (20), (21), depind de curentul de comandă prin intermediul fluxurilor Φ_0, Φ_{2ym} și Φ_{xm} menținîndu-se totuși pozitivi la variația acestui curent, ceea ce explică faptul că și în acest regim de funcționare caracteristica de intrare prezintă numai neliniaritatea corespunzătoare saturației.



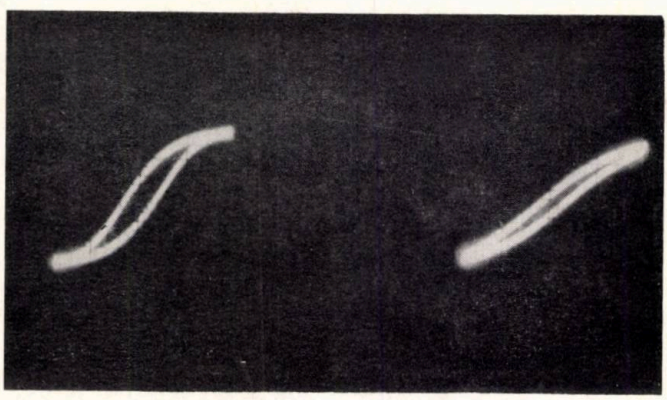
a

b

Fig. 7



a



b

Fig. 8

Pentru a determina relațiile existente între amplitudinile fluxurilor din miez se calculează curentul prin înfășurarea de comandă (i_y dat de rel. (3)), care trebuie să conțină numai componenta continuă, încît:

$$(22)\quad I_0 = k_1\Phi_0 + k_3\Phi_0^3 + 0{,}5\,k_3\Phi_{xm}^2\Phi_0 + 1{,}5\,k_3\Phi_{2ym}\Phi_0 - 0{,}25\,k_3\,\Phi_{2ym}\,\Phi_{xm}^2,$$

$$(23)\quad 0 = k_1\Phi_{2ym} + 3\,k_3\Phi_0^2\Phi_{2ym} + 0{,}5\,k_3\Phi_{2ym}\Phi_{xm}^2 + 0{,}75\,k_3\Phi_{2ym}^3 - 0{,}5\,k_3\Phi_0\Phi_{xm}^2.$$

Din relațiile (22) și (23) se pot obține familii de caracteristici importante în aprecierea comportării BNCO, și anume: $\Phi_0(I_0)$, cu Φ_{xm} ca parametru și $\Phi_0\,(\Phi_{xm})$, avînd I_0 drept parametru.

Ansamblul relațiilor (18)...(23) permite analiza completă a funcționării elementului neliniar considerat, în regim de magnetizare forțată.

În continuare se particularizează aceste relații în ipotezele de normare făcute în § 2.1.

Caracteristicile de intrare (rel. (18)) la diferite valori ale excitației sinusoidale și ale curentului de comandă au aspectul din fig. 9. La variația fluxului de excitație ele se înscriu pe caracteristica în valori maxime. Caracteristica în valori maxime se comportă la variația curentului de comandă în același mod ca și în regim de magnetizare liberă, adică are o singură neliniaritate, corespunzătoare saturației și se liniarizează la creșterea curentului de comandă.

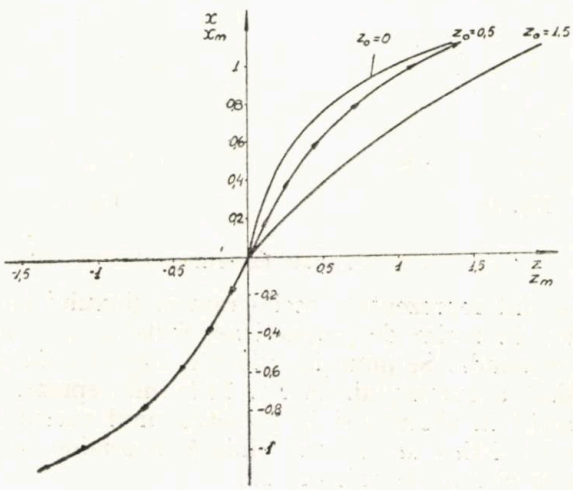


Fig. 9

Dependența coeficienților exprimați prin relațiile (19), (20) și (21) de amplitudinea excitației este reprezentată în fig. 10, iar în funcție de curentul de comandă, în fig. 11. Variațiile reduse ale acestor coeficienți, la modificarea semnalului excitație, explică suprapunerea caracteristicilor în valori instantanee peste cele în valori maxime (fig. 9). Aceste variații reduse se da-

torează faptului că componenta continuă a fluxului, care intervine în expresiile coeficienților, se modifică foarte puțin în funcție de semnalul excitație (fig. 12 și 13). În aceste figuri se reprezintă și variația amplitudinii armonicei a doua a fluxului care străbate înfășurarea de comandă. Curbele se obțin din relația (23) și pun în evidență condițiile de funcționare optimă ale BNCO ca dublor de frecvență (valoarea maximă a lui $y_{2m}(z_0)$ — fig. 13)

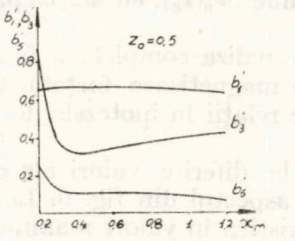


Fig. 10

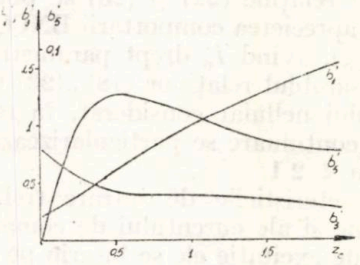


Fig. 11

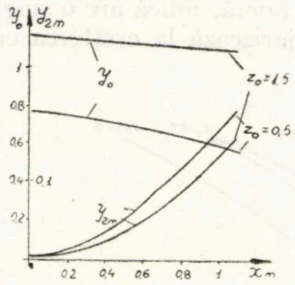


Fig. 12

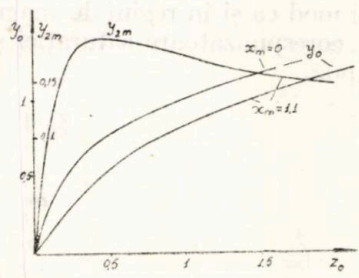


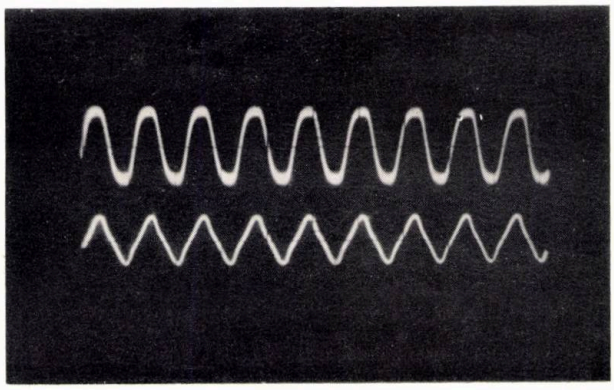
Fig. 13

3.2. Rezultate experimentale

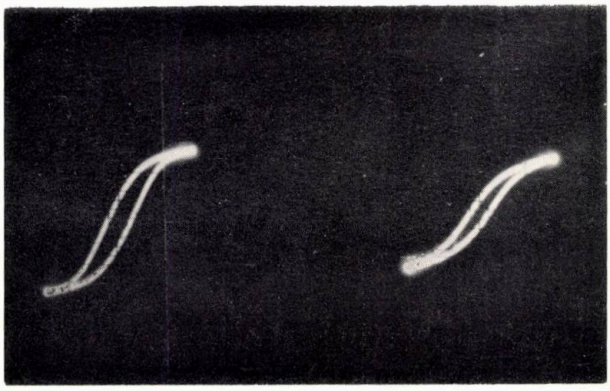
În fig. 14 *a* sînt reprezentate oscilogramele fluxului de excitație și curentului de lucru, în regim de magnetizare forțată, la o anumită valoare a curentului de comandă. Se pune în evidență efectul liniarizării prin forma aproape sinusoidală a curentului. În fig. 14 *b* sînt reprezentate comparativ caracteristicile $\varphi_x(i_x)$ în absența și în prezența unui curent de comandă. Și în acest caz caracteristica se menține liniară în origine, se apropie de axa curentului iar aria ciclului se micșorează.

4. Comparație între cele două regimuri de funcționare ale BNCO excitate prin flux sinusoidal

Pentru a trage unele concluzii cu privire la comportarea BNCO în regim de magnetizare liberă și forțată s-au reprezentat în fig. 15 și 16 variațiile semnalelor esențiale, notînd cu *1* curbele corespunzătoare regimului



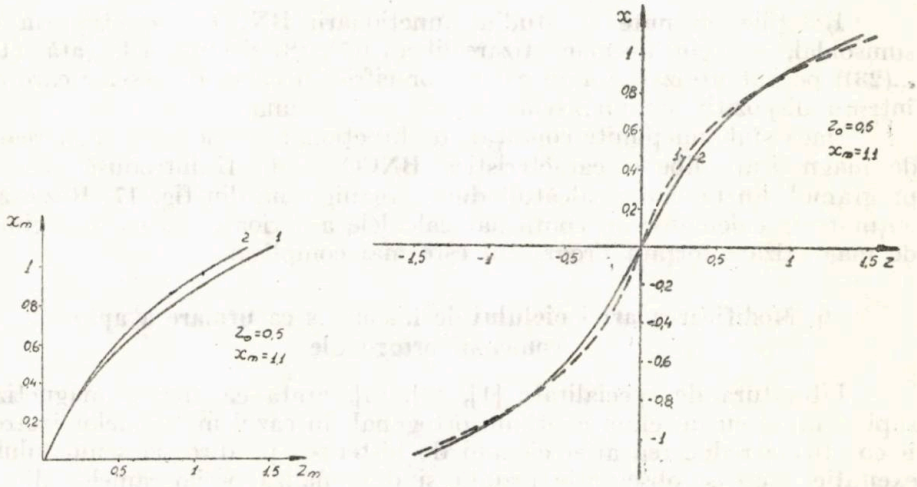
a



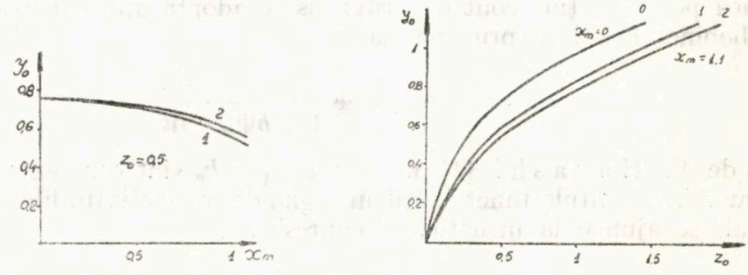
b

Fig. 14

de magnetizare liberă și cu *2* cele corespunzătoare regimului de magnetizare forțată.



a Fig. 15 *b*



a Fig. 16 *b*

În fig. 15 *a* sînt trasate caracteristicile de intrare $i_{xm}(\varphi_{xm})$ la o aceeași valoare a curentului continuu. Se constată că deosebirile dintre curbele *1* și *2* nu sînt esențiale. Din fig. 15 *b* se observă diferența dintre caracteristicile în valori instantanee, care este totuși neesențială în funcționare. Deci se poate aprecia că în cazul BNCO regimul de magnetizare nu modifică comportarea elementului neliniar, ca în cazul BNCL.

Aspectul caracteristicilor în valori instantanee și maxime arată că BNCO se prezintă, pentru semnale excitație mici, ca un element liniar, caracterul neliniar neinerțial punîndu-se în evidență pentru valori mari ale excitației.

Componenta continuă a fluxului nu se modifică distinct în cele două regimuri (fig. 16).

Din fig. 3 și 9 se poate trage concluzia că efectul comenzii ortogonale este pronunțat pentru nivele mici și medii ale semnalului excitație.

5. Utilizarea calculatorului cifric în studiul caracteristicilor BNCO

Relațiile obținute în studiul funcționării BNCO, excitate prin flux sinusoidal, în regim de magnetizare liberă ((7), (8) și (10)) și forțată ((18)... ...(23)) permit utilizarea unui calculator cifric în cazul proceselor care apar într-un dispozitiv cu un asemenea element neliniar.

Dacă sînt îndeplinite condițiile de funcționare prescrise pentru regimul de magnetizare liberă, caracteristica BNCO poate fi introdusă prin subprogramul din tabelul 1, alcătuit după organigrama din fig. 17. Rezultatele obținute la calculator au confirmat calculele anterioare. În cazul regimului de magnetizare forțată programul este mai complicat.

6. Modificarea ariei ciclului de histerezis ca urmare a aplicării comenzii ortogonale

Literatura de specialitate [1], [2], [6], arată că efectul magnetizării suplimentare cu un cîmp continuu ortogonal, în cazul materialelor izotrope, îl constituie reducerea ariei ciclului de histerezis pe direcția semnalului de excitație. Aceeași observație rezultă și din analiza oscilogramelor din fig. 8 *b* și 14 *b*.

Dacă pentru a ține cont de histerezis se adoptă aproximarea caracteristicii bobinei neliniare prin relația

$$i_x = k_1\varphi + k_3\varphi^3 + \frac{a}{1 + b\Phi_m} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \tag{24}$$

propusă de C. Hayashi [4], unde a, b, k_1 și k_2 sînt constante de material, atunci, în condițiile funcționării în regim de magnetizare liberă, la flux sinusoidal, se ajunge la următoarea expresie:

$$i_x = i\frac{\varphi_x}{\varphi} = \varphi_x\left(k_1 + k_3\varphi^2 + \frac{a}{1 + b\Phi_m^2} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right). \tag{25}$$

Se notează cu:

$$i_{hx} = \varphi_x \frac{a}{(1 + b\Phi_m^2)\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \tag{26}$$

aportul ciclului de histerezis la curentul de magnetizare.

În regim de magnetizare liberă mărimile care intervin în expresia lui i_{hx} sînt:

$$\varphi_x = \Phi_{xm} \cos\alpha, \tag{27}$$

$$\varphi_y = \Phi_0, \tag{28}$$

$$\varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2 \cos^2\alpha}, \tag{29}$$

$$\Phi_m = \sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2}. \tag{30}$$

Înlocuind relațiile (27)...(30) în (26) se obține:

Tabelul 1

```
F0RTRAN 13.02                                   PR0GRAM 11/09/73 00.40.22


 1          REAL A(4), X(3), Y(3)
 2          D0 21 K=1,11
 3          F1=K*0.1
 4          D0 21 I=1,25
 5          ZIO=I*0.1
 6          A(1)=0.8
 7          A(2)=0.
 8          A(3)=0.2+0.5*0.8*F1*F1
 9          A(4)=-ZIO
10          CALL F0RAB (A, 3, X, Y, K0D)
11          PRINT 5, K0D, X, Y
12        5 F0RMAT (10X,' K0D=', I2/3(5X,' X=',F8.5,5X,' Y=',F8.5/))
13          D0 30 L=1,3
14          IF(.N0T.((X(L).GT.O).AND.(X(L).LT.1.2).AND.(Y(L).EQ.O.))) G0 T0 30
15          V=0.2+0.8*X(L)*X(L)
16          D0 40 J=1,K
17          FIK=0.1*J
18          ZIK=V*FIK+0.8*FIK*FIK*FIK
19       40 PRINT 6,V,ZIK,F1,ZIO
20       30 C0NTINUE
21        6 F0RMAT (10X,'V=',F12.6,5X,'ZIK=',F12.6/10X,'F1=',F8.4,9X,'Z10=',
22          1F12.6/)
23       21 C0NTINUE
24          ST0P
25          END


F0RTRAN 13.02                                   PR0GRAM 11/09/73 00.40.22
```

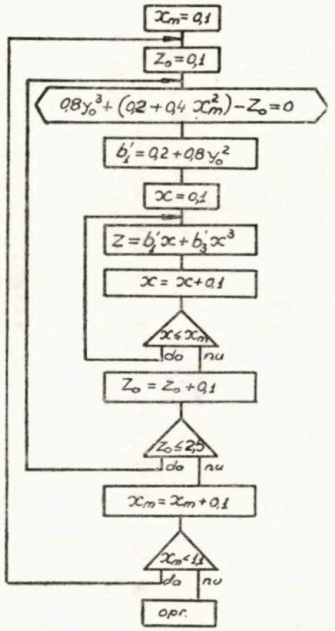


Fig. 17

$$i_{hx} = \Phi_{xm} \cos \alpha \frac{a}{1 + b\sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2}} \cdot \frac{-\omega\Phi_{xm}^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2 \cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2 \cos^2 \alpha}} =$$

(31)

$$= \frac{f(t)}{1 + b\sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2}} \cdot \frac{1}{\Phi_0^2 + \Phi_{xm}^2 \cos^2 \alpha}.$$

La creşterea curentului continuu (de comandă), datorită creşterii fluxului, Φ_0 curentul i_{hx} se micşorează confirmînd observaţiile experimentale anterioare.

7. Concluzii

1. În lucrare au fost obţinute un grup de relaţii care contribuie la analiza amănunţită a funcţionării BNCO.

2. Prelucrarea relaţiilor în cazul concret ales confirmă posibilitatea folosirii lor în procesele neliniare care apar în dispozitivele care conţin BNCO.

Primită la 12 septembrie 1973

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Bazele electrotehnicii şi măsurări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Angel Y., *Commande magnétique orthogonale des systèmes paramétriques.* Acta electronica, **4**, *3*, 359–380 (1960).
2. Angel Y., *Comportement des ferrites dans des champs magnétiques croisés.* Acta electronica, 7, *1*, 2 (1963).
3. Geyger W. A., *Dispozitive magnetice neliniare*, (trad. din l. engleză). Ed. Tehn., Buc., 1968.
4. Hayashi C., *The Influence of Hysteresis on Nonlinear Resonance.* J. of the Franklin Inst., **231**, *5*, 379–386 (1966).
5. Higa W. H., *Theory of Magnetic Cross Valve.* Trans. AIEE, **74**, 1 (1955).
6. Marie G., *Amplificateurs paramétriques pour basses fréquences à commande magnétique orthogonale.* Acta electronica **8**, *1* (1964).
7. Розенблат М. А., *Магнитные усилители.* Изд. „Советское Радио", М., 1956.
8. Savin Gh., Rosman H., *Circuite electrice neliniare şi parametrice.* Ed. Tehn., Buc., 1973.
9. Zitron N., Balan D., *Contribuţii la studiul funcţionării bobinei neliniare comandate longitudinal în regim de magnetizare liberă şi forţată.* St. şi cerc. de energ. şi electrot., (sub tipar).

ARBEITSWEISE DER NICHTLINEARER ORTHOGONAL-GESTEUERTER SPULE BEI SINUSFÖRMIGER FLUßERREGUNG IM FREIEN UND GEZWUNGENEN MAGNETISIERUNGSVORGANG

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden Beziehungen bestimmt die vollständig die Arbeitsweise der nichtlinearer orthogonal-gesteuerter Spule bei sinusförmiger Flußerregung im freien und gezwungenen Magnetisierungsvorgang beschreiben. Die Erläuterung dieser Beziehungen ruft einige Eigenschaften des analysierten nichtlinearen Elements hervor, derer Behandlung mit einem digitalen Rechner durchgeführt werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.319.55

ASUPRA DETERMINĂRII OSCILAȚIILOR DE RELAXARE OBȚINUTE ÎN CIRCUITELE ELECTRICE CARE CONȚIN UN ELEMENT NELINIAR CU CARACTERISTICA ÎN S

DE

VIOREL COSMA

1. Considerații teoretice

Pentru a obține oscilații de relaxare folosind un element neliniar cu caracteristica în S (lampa cu neon), se consideră schema de conexiuni indicată în fig. 1, în care elementul reactiv liniar este un condensator C legat în derivație cu elementul neliniar.

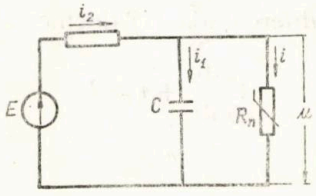


Fig. 1

În studiul acestei scheme nu se va ține seama de niciunul dintre parametrii paraziți ai elementelor schemei, astfel că ecuația de funcționare a schemei este o ecuație diferențială de ordinul I:

$$C\frac{du}{dt} + i = \frac{E - u}{R}, \tag{1}$$

unde $i = f(u)$ reprezintă caracteristica elementului neliniar.

În vederea obținerii oscilațiilor de relaxare este necesar ca dreapta de sarcină, $E - Ri = u$, să intersecteze caracteristica elementului neliniar într-un punct situat în domeniul rezistenței negative (fig. 2).

Generarea oscilaţiilor de relaxare este condiţionată şi de valoarea rezistenţei R, care trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$R \geqslant \frac{E-U_D}{I_C}. \tag{2}$$

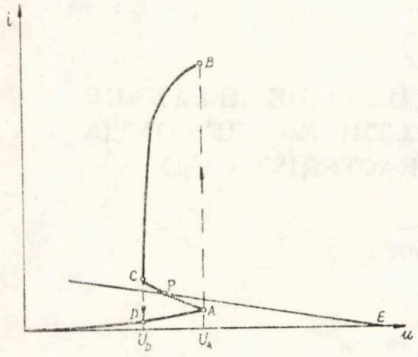


Fig. 2

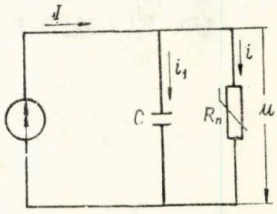


Fig. 3

Pentru simplificarea calculelor se consideră valoarea acestei rezistenţe $R = \infty$, schema fiind alimentată astfel de la un generator ideal de curent (fig. 3).

În acest caz ecuaţia diferenţială (1) devine:

$$C\frac{du}{dt} + i = I. \tag{3}$$

Considerînd

$$\frac{du}{di} = R(i), \tag{4}$$

$R(i)$ fiind rezistenţa diferenţială a lămpii, ecuaţia (3) capătă forma

$$CR(i)\frac{di}{dt} + i = I. \tag{5}$$

Dreapta de sarcină I = const. trebuie să intersecteze caracteristica $i = f(u)$ în domeniul rezistenţei negative (fig. 4), adică este necesar să fie îndeplinită inegalitatea:

$$I_A \leqslant I \leqslant I_C. \tag{6}$$

Funcţionarea lămpii este nestabilă, în acest caz obţinîndu-se ciclul de relaxare *ABCD*. Deplasarea punctului de funcţionare este lentă pe porţiunile *DA* şi *BC*, corespunzătoare procesului restabilirii şi formării vîr-

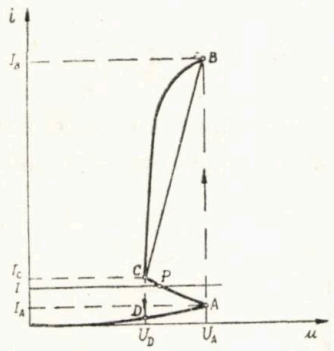


Fig. 4

fului impulsului, şi foarte rapidă pe porţiunile $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, obţinîndu-se două salturi de curent. Perioada oscilaţiilor se consideră alcătuită doar din timpii de restabilire şi ai formării impulsului.

2. Calculul timpului de restabilire

Se consideră porţiunea de caracteristică *DA* în care are loc procesul de restabilire a oscilaţiilor de relaxare. Din ecuaţia diferenţială (5) se obţine valoarea timpului de restabilire:

$$t_{rest} = C\int_{I_D}^{I_A} R(i)\frac{di}{I-i}. \tag{7}$$

Aproximînd caracteristica $i = f(u)$ prin segmente de dreaptă, pe porţiunea $\overline{DA}$, rezultă pentru t_{rest} expresia:

$$t_{rest} = CR_1\int_{I_D}^{I_A}\frac{di}{I-i} = CR_1 \ln\frac{I-I_D}{I-I_A}, \tag{8}$$

unde:

$$R(i) = R_1 = \frac{U_A - U_D}{I_A - I_D}. \tag{9}$$

Introducîndu-se mărimile normate;

(10) $$\bar{I} = \frac{I}{I_A} \quad \text{și} \quad \bar{t}_{rest} = \frac{t_{rest}}{CR_1}$$

și întrucît $I_D \ll I_A$ expresia (8) devine :

(11) $$\bar{t}_{rest} = \ln \frac{\bar{I}}{\bar{I} - 1}.$$

Funcția $\bar{t}_{rest}$ $(\bar{I})$ este reprezentată prin curba *1* din fig. 5. Pentru $\bar{I} = 1$, deci $I = I_A$, relația (11) conduce la rezultate eronate $(t_{rest} \to \infty)$

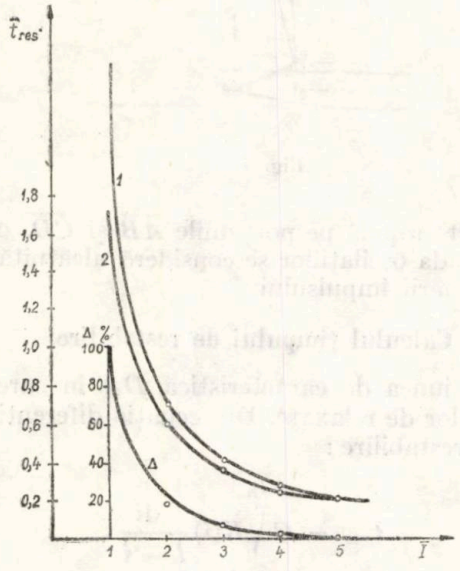


Fig. 5

Pentru calcule mai precise se consideră aproximarea caracteristicii prin funcții mai complexe. Astfel, pentru porțiunea de caracteristică *OA* se consideră aproximarea prin polinomul :

(12) $$u = ai - bi^2 + ci^3 - \ldots.$$

care se poate scrie și sub forma :

(13) $$u = \alpha e^{-\beta i}\, i,$$

unde

(14) $$\alpha = e\frac{U_A}{I_A} \quad \text{și} \quad \beta = \frac{1}{I_A}.$$

Aceste constante se obțin impunînd condițiile ca punctul A să aparțină curbei (13) și ca $R(i)$ să se anuleze în punctul A, pentru a se produce saltul de curent pînă în B. Astfel relația (13) devine:

$$\bar{u} = e^{1-\bar{i}}\,\bar{i}, \tag{15}$$

unde:

$$\bar{u} = \frac{u}{U_A} \quad \text{și} \quad \bar{i} = \frac{i}{I_A}. \tag{16}$$

Rezistența diferențială a elementului neliniar pe porțiunea OA a caracteristicii este:

$$R(\bar{i}) = \frac{d\bar{u}}{d\bar{i}} = e^{1-\bar{i}}(1-\bar{i}). \tag{17}$$

Introducînd mărimile normate (10), considerînd $I_D \ll I_A$ și înlocuind $R(i)$ cu (17), se obține expresia timpului de restabilire:

$$\bar{t}_{rest} = \int_0^1 \frac{e^{1-\bar{i}}(1-\bar{i})}{\bar{I}-\bar{i}}\,d\bar{i}. \tag{18}$$

Pentru $\bar{I} = 1$, deci $I = I_A$, se obține valoarea maximă, dar finită, a timpului de restabilire:

$$t_{rest\ max} = \int_0^1 e^{1-\bar{i}}\,d\bar{i} = 1{,}72. \tag{19}$$

Curba *2* din figura 5 pune în evidență variația funcției $\bar{t}_{rest}(\bar{I})$ determinată cu relația (18), curba *3* reprezentînd variația erorii relative $\Delta\%(\bar{I})$.

Analizînd curba *3* se observă că erorile făcute atunci cînd se recurge la aproximarea caracteristicii prin segmente de dreaptă sînt mici față de cazul cînd se utilizează o aproximare prin funcții complexe. Pentru $I \geqslant 4\,I_A$ se poate folosi, în calculul timpului de restabilire, metoda aproximării caracteristicii prin segmente de dreaptă.

3. Calculul duratei impulsului t_i

În cazul aproximării caracteristicii prin segmentul de dreaptă $\overline{BC}$, pornind de la ecuația diferențială (3), durata impulsului va fi:

$$t_i = CR_2 \int_{I_C}^{I_B} \frac{di}{i-I} = CR_2 \ln \frac{I_B - I}{I_C - I}, \tag{20}$$

unde :

$$R(i) = R_2 = \frac{U_A - U_D}{I_B - I_C}. \tag{21}$$

Introducînd mărimile normate :

$$\bar{t}_i = \frac{t_i}{CR_2} \quad \text{şi} \quad \bar{I}' = \frac{I}{I_C} \tag{22}$$

se obţine expresia normată a duratei impulsului :

$$\bar{t}_i = \ln \frac{I_B/I_C - \bar{I}'}{1 - \bar{I}'}. \tag{23}$$

S-a folosit drept element neliniar lampa stabilizatoare СГ1П. Pentru acest tip de element neliniar funcţia $\bar{t}_i(\bar{I}')$ este dată de curba *1* din fig. 6.

Pentru $\bar{I}' = 1$, deci $I = I_C$, se obţin valori eronate pentru $\bar{t}_i$, acesta tinzînd spre infinit.

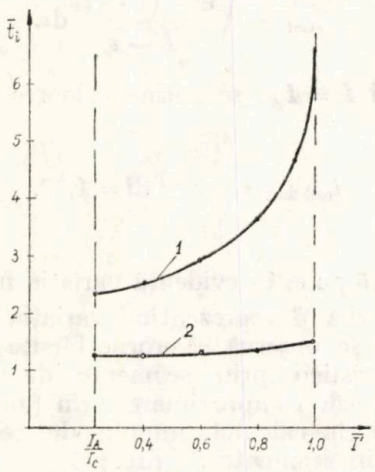


Fig. 6

În cazul unor calcule mai exacte se aproximează porţiunea de caracteristică *BC* prin polinomul de gradul 3 :

$$u = U_D + \gamma(i - I_C)^3, \tag{24}$$

în care

$$\gamma = \frac{U_A - U_D}{(I_B - I_C)^3}. \tag{25}$$

Rezistența diferențială a lămpii pe această porțiune este:

$$R(i) = \frac{du}{di} = 3\alpha(i - I_c)^2, \tag{26}$$

care se anulează în punctul C (pentru $I = I_C$), explicînd astfel saltul de curent din C în D.

Durata impulsului se calculează cu relația:

$$t_i = C\int_{I_C}^{I_B} \frac{R(i)\,di}{i - I} = 3\alpha C\int_{I_C}^{I_B} \frac{(i - I_C)^2}{i - I}\,di =$$

$$= 3\alpha C\left\{\frac{I_B^2 - I_C^2}{2} - (2I_C - I)(I_B - I_C) + [I_C^2 - I(2I_C - I)]\ln\frac{I_B - I}{I_C - I}\right\}. \tag{27}$$

Introducîndu-se mărimile normate (22), în care R_2 este dată de relația (21), se poate obține funcția $\bar{t}_i(\bar{I}')$, care pentru elementul neliniar considerat (СГ1П) are forma indicată de curba *2* din fig. 6.

Se poate observa că pentru $\bar{I}' = 1$, deci $I = I_c$, se obține pentru $\bar{t}_i$ o valoare maximă dar finită:

$$\bar{t}_{i\max} = 1{,}5. \tag{28}$$

Din analiza celor două curbe reprezentate în fig. 6, se poate observa că utilizînd metoda aproximării caracteristicii prin segmente de dreaptă se obțin pentru durata impulsului $\bar{t}_i$ valori mult mai mari decît cele determinate folosind o aproximare mai corectă a caracteristicii elementului neliniar. Pentru a obține rezultate mai bune este necesară aproximarea porțiunii de caracteristică BC prin două sau mai multe segmente de dreaptă. Totuși și în acest caz nu se poate evita rezultatul eronat obținut pentru $I = I_C$.

Întrucît $R_2 \ll R_1$, valorile stabilite pentru durata impulsului sînt mult mai mici decît cele ale timpului de restabilire.

4. Perioada oscilațiilor de relaxare

După cum s-a arătat mai sus, perioada oscilațiilor de relaxare este dată de suma:

$$T = t_{\text{rest}} + t_i, \tag{29}$$

neglijîndu-se timpii în care punctul de funcționare sare din A în B și respectiv din C în D.

În fig. 7 sînt date curbele de variație $\frac{T}{C}(\bar{I}')$ pentru cele două metode de aproximare a caracteristicii elementului neliniar. Datorită ponderii reduse a duratei impulsului în valoarea perioadei, erorile care se comit pentru $0{,}7 \leqslant \bar{I}' \leqslant 0{,}85$ sînt mici. Totodată, pentru aceste valori se obține și o stabilitate bună a oscilațiilor de relaxare.

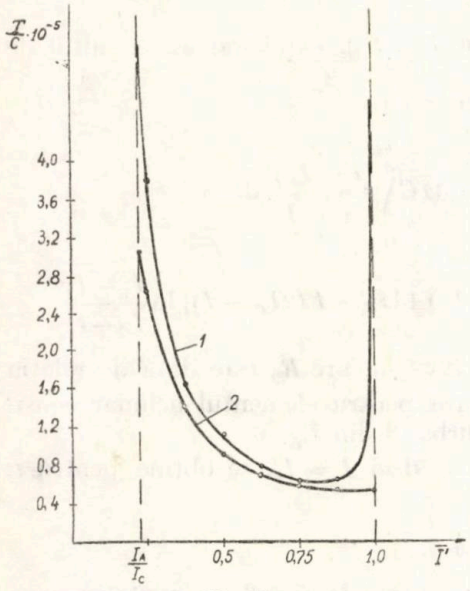


Fig. 7

5. Concluzii

Metoda simplă a aproximării caracteristicii prin segmente de dreaptă duce la rezultate complet eronate în calculul perioadei oscilațiilor de relaxare, în circuitele electrice neliniare cu caracteristica în S, pentru valori ale curentului I corespunzătoare punctelor în care au loc salturile de curent. Pentru aceste valori, în calculul perioadei, trebuie aproximată caracteristica prin funcții complexe. Metoda aproximării prin segmente de dreaptă se poate folosi fără erori mari pentru $I \approx 0{,}8\, I_C$, valori pentru care se obține și o stabilitate bună a oscilațiilor de relaxare rezultate în circuitele electrice considerate.

Primită la 10 iulie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică și mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Savin Gh., Rosman H., *Circuite electrice neliniare și parametrice.* Ed. Tehn., Buc., 1973.
2. Добронравов Е., *Проектирование схем ЭЦВМ на тунельных диодах.* Изд. „Энергия", М., 1970.
3. Жуховицкий Б. Н., *Теоретические основы электротехники.* Т. 2, Изд. „Энергия", М., 1972.

ABOUT DETERMINING THE PERIOD OF THE RELAXATION OSCILLATIONS IN THE ELECTRIC CIRCUITS CONTAINING A NON-LINEAR ELEMENT WITH A S-TYPE CHARACTERISTIC

(Summary)

The metod of determining the components of the period of the relaxation oscillation is given for the case of approximating the characteristic of the non-linear element by straight-line segments and complex functions; there is are also given the errors that occur when this approximation is used.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

D. C. 62—532.2: 538.26

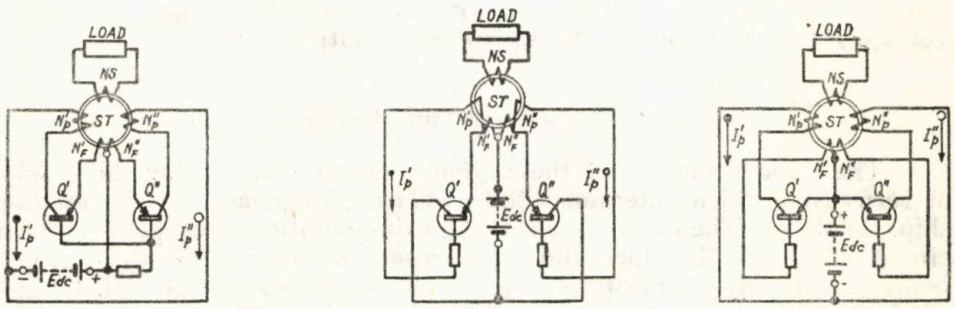
ADJUSTABLE FREQUENCY-TYPE MAGNETIC-COUPLED MULTIVIBRATOR WITH SINGLE-PHASE OUTPUT

BY

VIOREL COSMA, N. ALEXANDRU and PARASCHIVA HABA

1. Introduction

The use of transistors as switching elements in the circuits of the d. c. to a. c. static converters, which contain a saturating core element, was an important advancement in this field. These circuits have a specific application as square-wave supply source for magnetic amplifiers and asynchronous motors; they may be used in telemetering as voltage-to-frequency transducers, in B—H loop measurements containing a magnetic switch, in transient state analyzers, etc.



a *b* *c*

Fig. 1

The most simple multivibrator circuits use a transformer with a core possessing rectangular B—H characteristics and two switching transistors. Considering the possibility of connecting the terminals of both switching transistors with the primary and the secondary windings of the transformer, there are three connection types (Fig. 1) : a) common base - type, b) common - collector - type, c) common - emitter - type.

From the operating prineiple it results that the transistor commutation occurs in the moment when the core is saturating; thus, the oscillation frequency will be determined by the following factors. :

a) The saturation flux-density of the magnetic material of the core.
b) The cross-section of the core.
c) The number of turns of the transformer windings.
d) The d. c. supply voltage.

It results for the frequency the following relationship:

$$f = \frac{E_{dc}}{4B_s A_T N_{\text{eff}}} \times 10^8, \text{ [c/s]}, \tag{1}$$

where: E_{dc} — the d. c. supply voltage, [V], B_s — the saturation flux-density of the material, [Gs], A_T — the cross-section of the core, (cm^2), N_{eff} — the effective number of turns of the transformer windings.

In the case of common-collector-type multivibrators:

$$N_{\text{eff}} = N_p + N_F, \tag{2}$$

where: N_p — the number of turns of the primary winding of the transformer, N_F — the number of turns of the feed-back winding.

For common-base-type multivibrators:

$$N_{\text{eff}} = N_p - N_F. \tag{2'}$$

For common-emitter-type multivibrators:

$$N_{\text{eff}} = N_p. \tag{2''}$$

The alternating output voltage is linearly proportional to the supply voltage E_{dc}. But the linear relationship between the input voltage E_{dc} and the frequency of the output voltage is not favourable for the oscillation frequency of the magnetic-coupled multivibrator (MCM) to be varied independently, without changing the supply voltage and consequently the output voltage.

This led to imagining certain circuits, which allow the frequency control to be done in wide limits, without either acting upon the supply voltage E_{dc}, nor distorting the square-wave output.

2. Theoretical Considerations

The basic principle of these circuits consists in varying the number of turns N_{eff}, which determines the oscillation frequency, as the relationship (1) shows. The method consists in using additional components in the circuit of the MCM, which allow the easier variation of the N_{eff}, e. g., a non-saturate output transformer and a saturable reactor SR with a single winding or using a continuously adjustable autotransformer together with a SR (Fig. 2).

When a SR with a core possessing rectangular $B - H$ characteristics is connected across the load (Fig. 2 *a*), the frequency of the output voltage may be varied in wide limits by changing the effective number of turns N_{SR} of the SR.

The peak voltage applied to the winding of the SR will be:

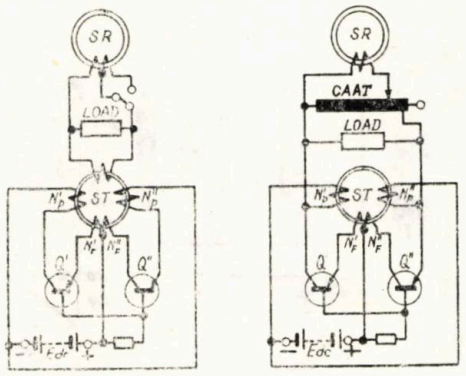
$$E_{SR} = E_{dc} \frac{N_{SR}}{N_{\text{eff}}}. \tag{3}$$

Considering the fact that the $B_s' A_{SR} N_{SR}$-product of the SR is smaller than the $B_s A_T N_{\text{eff}}$-product of the MCM (N_{SR} being much smal-

ler than N_{eff}), the frequency of the output voltage will be determined only by the parameters of this reactor:

$$f = \frac{E_{SR}}{4\,B'_s\,A_{SR}\,N_{SR}} \times 10^8, \text{[c/s]}, \tag{4}$$

where: B_s — the saturation flux-density of the SR-core, A_{SR} — the cross-section of the SR-core, N_{SR} — the number of turns of the SR-winding.



a *b*

Fig. 2

It results from the relationships (3) and (4):

$$f = \frac{E_{dc}}{4\,B'_s\,A_{SR}\,N_{SR}\,N_{\text{eff}}/N_S} \times 10^8, \tag{5}$$

where we may write:

$$N_{eq} = N_{SR}\,\frac{N_{\text{eff}}}{N_S}, \tag{6}$$

with N_S — the number of turns of the load winding (a. c.), N_{eq} — the equivalent number of turns of the MCM controlled by SR.

We may note that the frequency of the output voltage is directly proportional to the turn number N_s of the load winding and inversely proportional to the N_{SR}.

3. Experimental Results

A switching-transistor MCM with single-phase output was designed and built. A common-collector-type circuit was used (Fig. 3) and the MCM has the following ratings:

$$E_{dc} = 24\,\text{V}, \quad E_{ac} = 220\,\text{V}, \quad P_n = 40\,\text{W}.$$

The control of the output voltage was achieved by means of a SR connected in parallel across the output winding of the MCM.

The d.c. supply of the circuit was achieved by means of a rectifier, connected with a filter and a voltage stabilizer to the a.c. network transformer.

The caracteristics $U_e = U_e(U_i)$ and $f = f(U_i)$ were plotted in the open-circuit state of the output and the linear dependence of the output voltage and frequency from the input voltage was observed (Fig. 4).

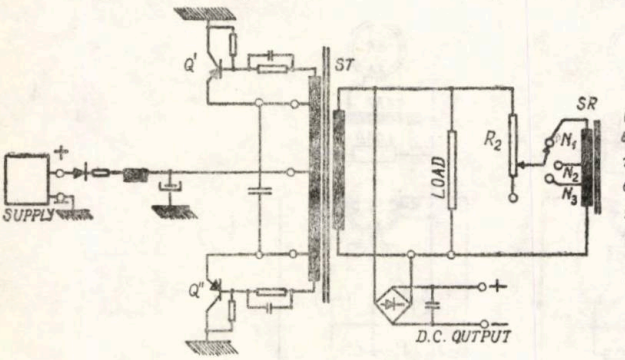


Fig. 3

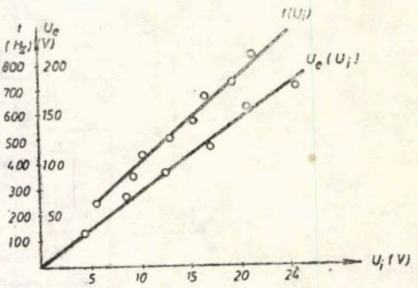


Fig. 4

The influence of the SR on the frequency of the output voltage of the MCM was studied and the results were obtained for three different values of the number of turns of the SR-winding (Fig. 5).

From the analysis of the results we may conclude that;

a) For a big number of turns of the SR-winding, the frequency of the output voltage as well as the value of the output voltage remain practically unchanged at the variation of the current through the SR-winding.

b) The less the number of turns of the SR-winding is, the bigger the relative variations of the frequency are, especially for greater loads and smaller supply voltages.

c) For a certain variation interval of the current in the SR-winding (of the resistance of the controlling rheostat, respectively) the frequency remains constant.

d) This interval decreases for higher supply voltages and smaller numbers of turns N_{SR}. This is quite easy to explain, as for bigger values of the controlling resistance, i.e. for smaller values of the current in the SR respectively, the SR will have a non-saturate operation. The MCM-core instead will operate between the saturation levels. Decreasing the controlling resistance (i.e. increasing the current in the SR-winding, respectively), the SR-core will operate between its own saturation levels and the MCM-core should have a non-saturate operation.

Limiting the non-saturate operation field of the SR-core could be done by increasing the value of the input voltage, which in turn, will

result in a bigger value of the voltage applied to the SR-winding, as the $U_e = U_e(U_i)_{R_2}^{n}$ characteristic shows.

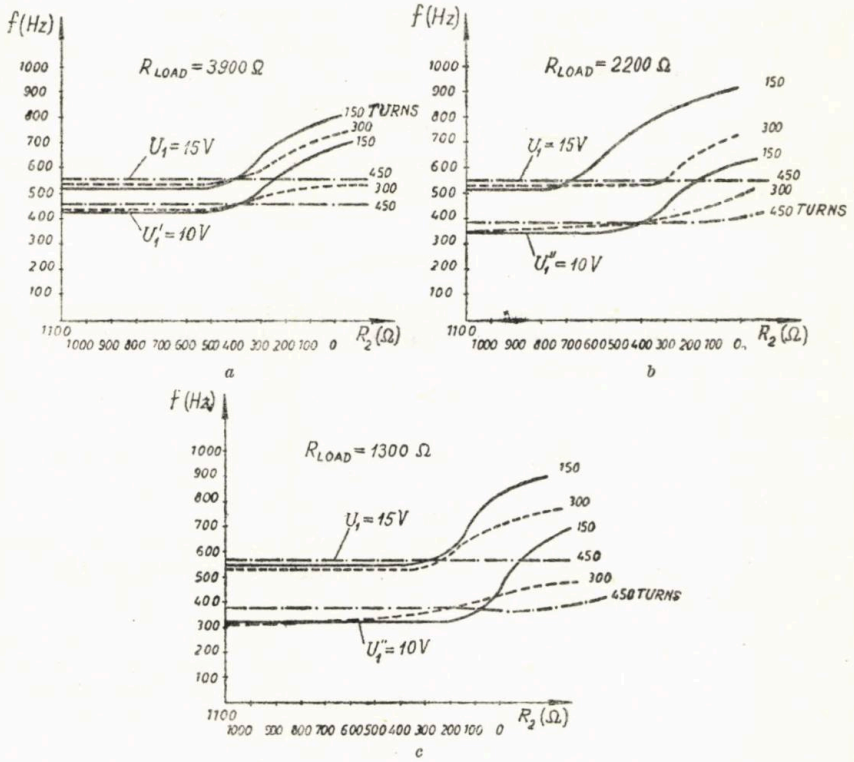


Fig. 5

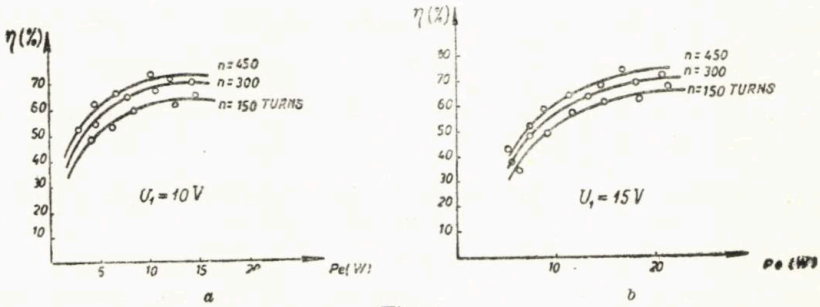


Fig. 6

The variation of the efficiency versus output power was also plotted for two different values of the supply voltage and three values of the number of turns of the SR-winding (Fig. 6).

It results from the analysis of these characteristics that the efficiency of the MCM depends both of the supply voltage and the turn number N_{SR} of the SR, namely: η is greater for smaller values of the N_{SR} and of the supply voltage E_{dc} (also known as U_i). This happens because a small value of the N_{SR} leads to an increased frequency of the output voltage (Fig. 5), which results in increasing the core losses. Conversely, a low supply voltage implies, as Fig. 4 shows, a lower frequency, which also leads to a decrease of frequency and losses in the core.

The maximum obtainable efficiency is about 70 %, which agrees with the values given in the literature.

4. Conclusions

1. The actual circuit realized only with electronic components made in Romania, is compact, stable, reliable and allows an easy control of the frequency in wide limits.

2. The variation of frequency is achieved independently of the supply voltage.

3. There is a possibility of improving the MCM performance by using magnetic cores with superior qualities, which would lead to the shape improvement of the output voltage.

4. As a future task, there is still to study analytically the operation of this MCM, using a van der Pol-type equation, as this is the case of a selfoscillating system.

Received, Mai 28, 1973

Polytehnic Institute, Jassy,
Department of Electricol Machines
and Electrotechnics

REFERENCES

1. Bright L. R., *Junction Transistors Used as Switches.* AIEE Trans., **74 I**, 111—121 (1955).
2. Geyger A. W., *Recent Developments on Magnetic-coupled Multivibrators.* AIEE Trans., **79 I**, 106—112, (1960).
3. Geyger A. W., *Frequency Control of Magnetic Multivibrators.* Electronics, **32**, *30*, 54—56 (1959).
4. Biggerstaff J. C., *Reducing Spikes in D-c to D-c Converter Outputs.* Electronics, **34**, *42*, 64—65 (1961).

MULTIVIBRATOR CUPLAT MAGNETIC, DE FRECVENŢĂ VARIABILĂ, CU IEŞIRE MONOFAZATĂ

(Rezumat)

A fost construit şi încercat un multivibrator cuplat magnetic, cu tranzistoare de comutaţie, cu ieşire monofazată, în montaj tip colector comun. Variaţia frecvenţei se realizează montînd în paralel pe înfăşurarea de ieşire un reactor saturabil şi ajustînd curentul prin acesta.

Caracteristicile trasate pun în evidenţă posibilitatea de comandă a frecvenţei, în limite relativ largi fără a fi afectată valoarea tensiunii de ieşire sau forma de undă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ ELECTRONICĂ AUTOMATIZĂRI

D.K. 621.317.334

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN ZUR STEIGERUNG DER ARBEITSGESCHWINDIGKEIT DES RUMÄNISCHEN WIDERSTANDMESSERS MIT 2 500 V BETRIEBSSPANNUNG

VON

M. ANTONIU, JOHANNES TOBIE, MARIANA KENDLER, DINA CĂRUCERU, M. IANOŞ, GH. CHIRIAC, M. IACOB und I. SOLOMON

1. Einleitung

Eine der wichtigsten Forderungen die an die modernen Widerstandsmesser gestellt werden, ist die, eine große Arbeitsgeschwindigkeit [1] zu besitzen um ein möglichst schnelles Eingreifen im Falle von Isolationsschäden der elektrischen Kabel, Maschinen und anderer Anlagen gewährleisten zu können.

Der rumänische transistorisierte Widerstandsmesser mit 2 500 V Betriebsspannung, bekannt unter der Bezeichnung MT 25 [2], hat, trotz einer Reihe von Vorteilen, die ihn in der Praxis durchgesetzt haben, auch einige Mängel, unter anderem auch den einer großen Zeitkonstante, die sich negativ auf seine Arbeitsgeschwindigkeit auswirkt.

Diese Zeitkonstante ist groß, weil der Ausgangswiderstand des den Messkreis speisenden Umformers [3] groß ist. Die Untersuchungen, die in der vorliegenden Arbeit vorgeführt werden, beziehen sich deshalb auf die Möglichkeiten, diesen Ausgangswiderstand zu vermindern.

2. Beschreibung des Widerstandsmessers MT 25

Das Schaltbild des Widerstandsmessers ist in Abb. 1 dargestellt: die Transistoren T_1, T_2, der Umspanner T, die Widerstände R_1,..., R_4 und die Kondensatoren C_B, C_T bilden einen Gegentaktwechselrichter, der den aus den Dioden D_1,..., D_8 und den Kondensatoren C_1,..., C_8 ($C_1 = C_2 = ... = C_8$) zusammengesetzten Spannungsvervielfacher speist. Letzterer gibt die für den Messkreis nötige Gleichspannung von $U = 2\,500$ V, ab. Der

Messblock setzt sich aus dem Drehspul-Quotientenmesser L und dem zumessenden Widerstand R_x zusammen; der Widerstand R_5 dient zur Begrenzung auf einen zuläßlichen Wert des in der Serienspule b_1 fließenden Stromes I_1, für den Fall, daß $R_x = 0$; R_6 dient zur Festlegung auf den Nennwert des in der Parallelspule b_2 fließenden Stromes I_2, und R_7 zur Kontrolle der Batteriespannung.

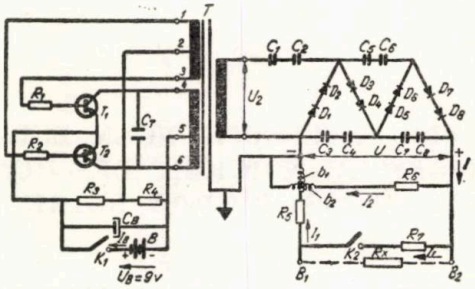


Abb. 1

Der Apparat funktioniert wie folgt. Der Unterbrecher K_1 wird betätigt, der Apparat beginnt zu arbeiten, darauf wird auch K_2 betätigt. Von der Skala wird dann abgelesen ob die Batteriespannung U_B in zuläßlichen Grenzen liegt. Danach werden beide Unterbrecher (K_1 und K_2) wieder geöffnet— der Apparat funktioniert nicht mehr, die Messkabel werden an den Anschlußpolen (B_1, B_2) des Apparates und an dem Messobjekt befestigt. Wird dann nur K_1 betätigt, so kann man auf der Skala des Apparates den Wert des Widerstandes R_x ablesen.

3. Kritik des Schaltbildes des Umformers des Widerstandsmessers MT 25

Das vereinfachte Schaltbild des Umformers des Widerstandsmessers MT 25 ist in Abb. 2 dargestellt, wo mit Y der Wechselrichter und mit M der Messblock bezeichnet wurde; die anderen Bezeichnungen haben dieselbe Bedeutung wie in Abb. 1.

Die wichtigsten Beziehungen die die Arbeitsweise eines Spannungsvervielfachers beschrieben, sind [3]:

$$(1) \qquad U_2 \approx mU_B\,, \qquad (2) \qquad E \approx nU_2,$$

$$(3) \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{2n^3/3 + n^2/2 - n/6}{fCR_m}, \qquad (4) \qquad \frac{\delta E}{E} = \frac{n(n+1)}{2fCR_m},$$

wobei folgende Bezeichnungen gelten: m — Umspannverhältnis des Umspanners T (Abb. 1), E — Ausgangsspannung des Spannungsvervielfachers

ohne Belastung, n — Stufenanzahl des Spannungsvervielfachers, $\Delta E/E$ — Spannungsabfall im Spannungsvervielfacher von Belastungsfreiheit bis Nennbelastung, $\delta E/E$ — Welligkeitsfaktor der Spannung E, f — Arbeitsfrequenz des Wechselrichters, R_M — Eingangswiderstand in den Messblock.

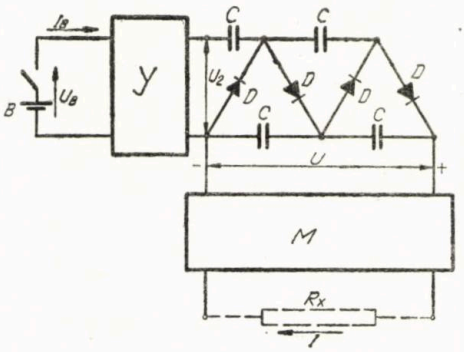


Abb. 2

Der Ausgangswiderstand des Spannungsvervielfachers, R_i, wird als das Verhältnis zwischen dem gesamten Spannungsabfall von Belastungsfreiheit bis Nennbelastung und dem Belastungsstrom, angegeben. Gemäß dieser Definition folgt aus den Beziehungen (3) und (4):

$$R_i = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{6fC}. \tag{5}$$

Demnach steigt R_i rapid mit n und erreicht hohe Werte, z. B. bei MT 25 mit $n = 4$, $f = 500$ Hz, $C = 0{,}005$ μF, ist $R_i = 24$ MΩ.

Ein so großer Wert des Ausgangswiderstandes R_i führt zu folgenden, wichtigsten Unzulänglichkeiten in der Arbeitsweise des Widerstandsmessers:

a) Großer Spannungsabfall in dem Spannungsvervielfacher, für dessen Kompensation eine beträchtliche Vergrößerung der Windungsanzahl in dem sekundären Teil des Umspanners T nötig wäre, wie aus der Gleichung:

$$U = nU_2 - IR_i = mnU_B - IR_i \tag{6}$$

ersichtlich ist.

Z. B. resultiert, in dem Falle des MT 25, bei $I = 25$ μA (dem Strom bei dem Nennwiderstand $R_x = 100$ MΩ), ein Spannungsabfall von ungefähr 600 V in dem Vervielfacher, für dessen Kompensation man das Umspannverhältnis m um ungefähr 25%, dem Verhältnis, das aus Beziehung (1) folgt, gegenüber, vergrößern müsste.

b) Die Zeitkonstante des Apparates ist groß, was zur Verminderung der Arbeitsgeschwindigkeit, einer wichtigen Unzulänglichkeit in dem vor-

liegenden Falle, führt. Konkret gesehen bedeutet das, daß die dem Messobjekt anliegende Spannung U_x einen Wert von ungefähr $2/3\ U_x$ erst nach der Zeitspanne

$$\tau_i = R_i C_x \tag{7}$$

erreicht, wie es aus der Beziehung:

$$U_x = U(1 - e^{-\frac{t}{R_i C_x}}) \tag{8}$$

folgt, wo C_x die Kapazität des Messobjektes darstellt. Z. B., in dem vorliegenden Falle, wenn $C_x = 1\ \mu F$ (ein Fall der oft in der Praxis auftritt), folgt daraus $\tau = 24 . 10^6 . 10^{-6} = 24$ Sek., was bedeutet, daß der Wert des Widerstandes R_x erst 30...40 Sek. nach dem Anschliessen des Apparates von der Skala des Apparates abgelesen werden kann.

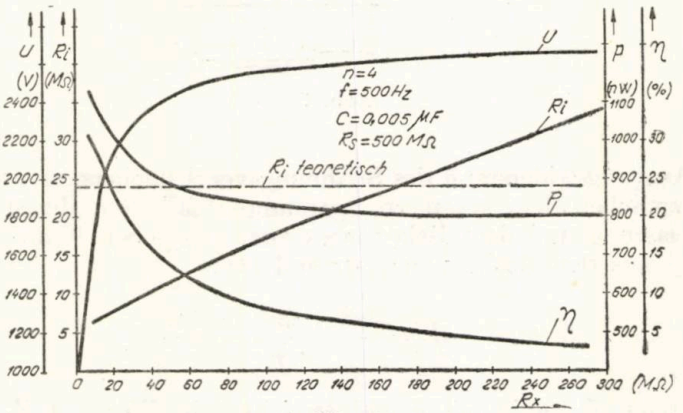


Abb. 3

In Abb. 3 sind die auf experimentellem Wege erhaltenen Funktionskennlinien des Umformers dargestellt. Es ist ersichtlich, dass R_i nicht konstant ist, wie es theoretisch aus Bezichung (5) bestimmt werden kann (gestrichelte Linie in Abb. 3), sondern fällt mit fallendem Messwiderstand. Dabei bleibt R_i trotzdem bei sehr hohen Werten, z. B. bei $R_x = 100$ MΩ, $R_1 = 17{,}5$ MΩ. Die Nichtübereinstimmung zwischen der Beziehung (5) und der auf experimentellem Wege erhaltenen Kennlinie $R_i(R_x)$ hat wahrscheinlich ihren Ursprung in dem ungenauen Einhalten der Voraussetzungen unter denen die Beziehungen (3) und (4) abgeleitet wurden, und zwar, die Leitperiode der Transistoren ist konstant und viel länger bemessen als die Blockierungsperiode.

Aus Abb. 3 ist ersichtlich, daß der Verlauf der Kennlinie $U(R_x)$ annehmbar ist, in dem Sinne, daß für $R_x \geqslant 70$ MΩ, $U \geqslant 2\,500$ V. Die von der Batterie absorbierte Leistung schwankt zwischen 800 und 1 000 mW, der Wirkungsgrad (η) des Umformers ist unter 30%.

4. Möglichkeiten zur Verminderung des Ausgangswiderstandes des Umformers

Aus den oben angeführten Tatsachen folgt, daß die bedeutendste Unzulänglichkeit des Umformers des Apparates MT 25, dessen grosser Ausgangswiderstand, R_i, ist.

Die Verminderung dieses Ausgangswiderstandes kann auf drei Wegen angestrebt werden, wie es aus der Beziehung (5) folgt: a) Verminderung der Stufenanzahl n, b) Steigerung der Arbeitsfrequenz f, c) Steigerung der Kapazitäten C.

In der vorliegenden Arbeit werden experimentelle Untersuchungen dieser drei Möglichkeiten beschrieben.

4.1. Verminderung der Stufenanzahl des Spannungsvervielfachers

Der Vervielfacher des MT 25 hat, wie es aus Abb. 1 ersichtlich ist, $n = 4$ Stufen.

In diesem Fall kann $n = 2$ gemacht werden; es sind dann zwei Spannungsverdopplerschaltbilder möglich: a) monoalternanter Verdoppler (Abb. 4), b) bialternanter Verdoppler (Abb. 6).

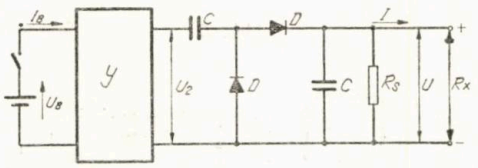


Abb. 4

Es muß jedoch dem Rechnung getragen werden, daß die Verminderung der Stufenanzahl von 4 auf 2 eine Verdopplung der Ausgangspannung U_2 des Umspanners erfordert, was zu einer Vervierfachung der Verluste

$$P_c = 2\pi f U_2^2 C_p \tag{9}$$

führt. Die Ursache dieser Verluste sind die im sekundären Teil des Umspanners existierenden parasitären Kapazitäten C_p. Die Verdopplung der Sekundärwindungsanzahl dieses Umspanners bedeutet einen größeren Materialverbauch und führt zu einer bedeutenden Steigerung der Sekundärimpedanz.

Im Falle des Monoalternanzschaltbildes (Abb. 4) müßte R_i theoretisch (s. Bez. (5)) von 24 MΩ auf 4 MΩ fallen ($f = 500$ Hz, $C = 0{,}005$ μF). Die praktischen Versuche die mit diesem Spannungsvervielfältiger gemacht wurden (s. Kennlinien der Abb. 5) zeigen aber daß R_i weit weniger fällt als dieses theoretisch bestimmt wurde. Ausserdem ist aus Abb. 5 erkennbar

daß die absorbierte Batterieleistung (P) steigt, was durch die Steigerung der Verluste, deren Ursprung die parasitären Kapazitäten C_p sind, erklärt werden kann. Die Belastungskurve $U\,(R_x)$ fällt ebenfalls gegenüber der vorherigen Situation ($n = 4$), bedingt durch die höhere Impedanz des Umrichters T mit einer verdoppelten Sekundärwindungsanzahl.

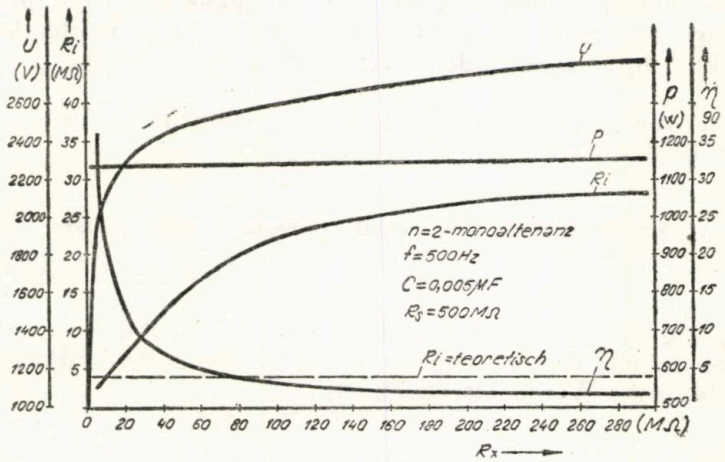


Abb. 5

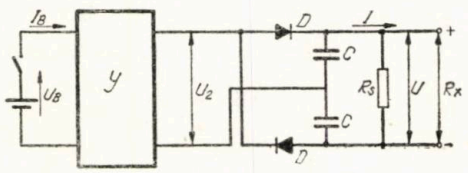


Abb. 6

Abb. 6 stellt das Schaltbild des Umformers mit bialternantem Spannungsverdoppler und Abb. 7 die Kennlinien dieses Umformers, dar. Die Versuche wurden unter denselben Voraussetzungen ($f = 500$ Hz, $C = 0{,}005$ µF, $R_s = 500$ MΩ), wie im Falle der Schaltbilder aus Abb. 1 und 4, gemacht.

Aus der Analyse der Kennlinien aus Abb. 7 können ungefähr dieselben Schlüße wie im Falle der Kennlinien aus Abb. 5 gezogen werden und zwar, daß R_i zu wenig fällt, daß die absorbierte Batterieleistung steigt und daß sich die Spannung am Prüfobjekt (Belastungskurve) der Anfangssituation ($n = 4$) gegenüber, verschlechtert.

Die obigen Schlußfolgerungen zeigen daß die Verringerung der Stufenanzahl von 4 auf 2 keinen wirkungsvollen Weg für die Verminderung des Ausgangswiderstandes des Umformers des MT 25 darstellt.

4.2. Steigerung der Arbeitsfrequenz des Wechselrichters

Bei der Steigerung der Arbeitsfrequenz des Wechselrichters steigen sowohl die Kernverluste im Umspanner, als auch die kapazitiven Verluste, P_c (Bez. (9)). Deshalb kann die Frequenz von 400...500 Hz auf höchstens 800...1 000 Hz gesteigert werden, wenn man den aktuellen Typ des Um-

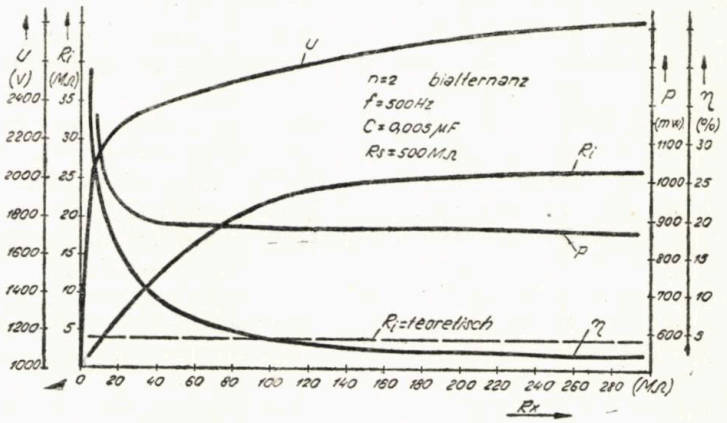


Abb. 7

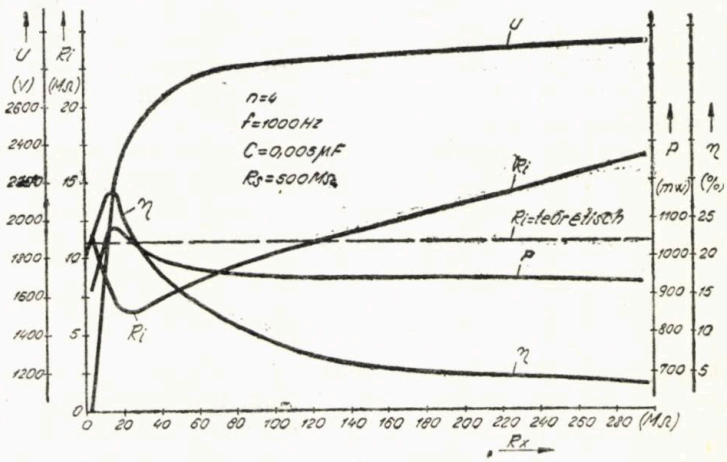


Abb. 8

spanners (Transformatorbleche aus Fe - Si; 0,35 mm), beibehält. Bei Verwendung eines Ferritkerns könnte die Frequenz bis auf 5...10 KHz gesteigert werden, wobei die obere Grenze von den kapazitiven Verlusten, P_c, bestimmt werden würde.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich lediglich auf den Fall des aktuellen Umspanners (mit Transformatorblechen). Sie wurden unter den Voraussetzungen $n = 4$, $f = 1\,000$ Hz, $C = 0{,}005$ μF und $R_s = 500$ MΩ, gemacht; die Resultate sind in Abb. 8 dargestellt.

Ebenfalls in Abb. 8 wurde die Gerade $R_i = \text{konst.} = 12$ MΩ mit unterbrochener Linie eingezeichnet, wobei der Wert von R_i mit der Beziehung (5) berechnet wurde. Vergleicht man diese Gerade mit der experimentellen Kennlinie $R_i\,(R_x)$, so kann man eine bessere Übereinstimmung der theoretischen und praktischen Resultate, als im Falle des originellen Umformers, feststellen.

Wenn man nun die Kennlinien (Abb. 8) mit denen aus Abb. 3 vergleicht, so sieht man, daß sich R_i im ersten Falle zwischen den Grenzwerten 6,5...16,5 MΩ verhält — also im Mittel 11,5 MΩ, im zweiten Falle aber zwischen 6...34 MΩ — Mittel 20 MΩ. Dieses beweist, daß der Ausgangswiderstand des Vervielfachers fast um die Hälfte reduziert werden kann, wenn die Arbeitsfrequenz von 500 auf 1 000 Hz gesteigert wird. Ausserdem kann eine Verbesserung der Kennlinie $U\,(R_x)$ beobachtet werden; z. B. im ersten Falle ist $U = 2\,360$ V bei $R_x = 20$ MΩ, im zweiten Falle ist $U = 2\,140$ V bei $R_x = 20$ MΩ, was durch die Verminderung des Ausgangswiderstandes erklärt werden kann.

Endlich muß noch festgestellt werden, daß die absorbierte Batterieleistung im ersten Falle (1 000 Hz) etwas größer ist, die schwankt zwischen den Grenzwerten 900...1 170 mW (Mittel 1 100 mW), während im zweiten Falle das Mittel der absorbierten Batterieleistung bei 970 mW liegt. Die Verbrauchssteigerung (etwa 13%) ist im wesentlichen eine Folge der größeren Kernverluste, also könnten die zusätzlichen Verluste durch Verwenden eines Transformatorkerns aus Blechen höchster Qualität (texturierte Bleche) erheblich verkleinert werden.

Die obigen Feststellungen offenbaren daß die Steigerung der Arbeitsfrequenz des Wechselrichters einen wirkungsvollen und sicheren Weg zur Verminderung des Ausgangswiderstandes R_i darstellt. In Zukunft könnten Versuche mit höheren Frequenzen gemacht werden.

4.3. Steigerung der Kapazitäten C

Die Kapazitäten C wurden von 0,005 μF bis 0,0125 μF (also 2,5 mal) gesteigert, wobei die Anfangsfrequenz ($f = 500$ Hz) beibehalten wurde. Es wurden Kondensatoren derselben Qualität wie die originellen (mit Wachspapier-Isolation) von IPRS — Băneasa hergestellt, verwendet. Es wurden diese Werte gewählt, weil die Abmessungen der Kondensatoren von 0,025 μF/ 1 000 V, rumänischer Fabrikation (IPRS — Băneasa), keine Veränderung der Form und der Dimensionen der Apparatschachtel des MT 25 erfordern.

Die Änderungen der Kennlinien des Umformers die von den verschiedenen Werten der Kapazitäten C bedingt werden, können auf Abb. 9 verfolgt werden.

Der Ausgangswiderstand R_i des Umformers schwankt zwischen 5... ...18 MΩ — Mittel 11,5 MΩ, was beweist, daß R_i auf diesem Wege auf etwa die Hälfte des Wertes des Originalausgangswiderstandes (20 MΩ) reduziert werden kann. Ebenfalls kann eine Nichtübereinstimmung zwischen dem theoretischen Wert (unterbrochene Linie) und der experimentellen Kennlinie $R_i\,(R_x)$ festgestellt werden. Die anderen Kennlinien, $U(R_x)$, $P(R_x)$ und $\eta(R_x)$ werden praktisch von der Änderung der Kapazitätswerte C nicht beeinflusst.

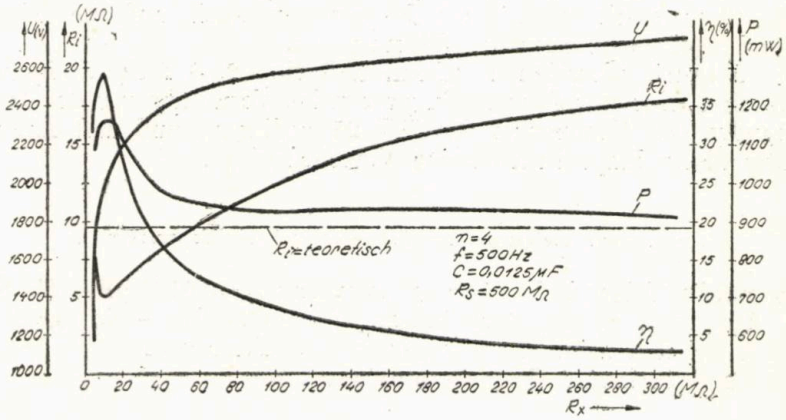


Abb. 9

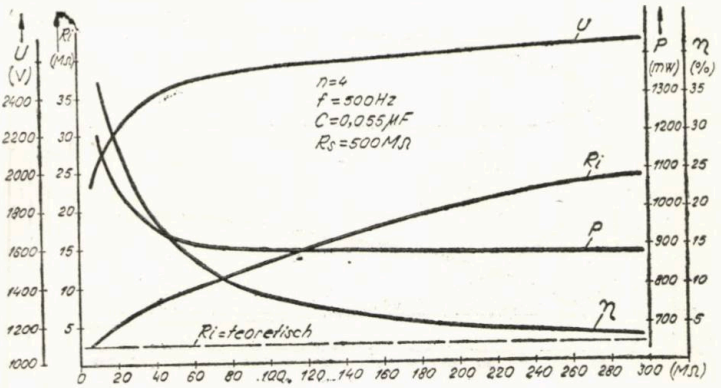


Abb. 10

Wenn nun die Kennlinien aus Abb. 8 mit denen aus Abb. 9 verglichen werden, so folgt daraus, daß in beiden Fällen ungefähr die gleichen Vorteile, die Verminderung des Ausgangswiderstandes R_i betreffend, erzielt werden. Der einzige, größere Unterschied ist der, daß der Wirkungs-

grad des Umformers im ersten Fall (Steigerung der Arbeitsfrequenz) etwas fällt.

Um festzustellen bis zu welcher Grenze die Steigerung der Kapazitäten C rationell ist, wurden auch mit größeren Werten Versuche gemacht. Die Resultate der Versuche mit $C = 0{,}055$ μF (11 mal größer als die Originalwerte) sind in Abb. 10 dargestellt. Der Ausgangswiderstand R_i ist im Mittel 13,25 MΩ (er schwankt zwischen 2,5 und 24 MΩ), also größer als im Falle $C = 0{,}0125$ μF. Dieses beweist daß es nicht rationell ist die Kapazitäten mehr als 2...3 mal zu vergrößern (Originalwert — $C = 0{,}005$ μF). Ebenfalls üben stark vergrößerte Kapazitäten auch auf die Kennlinien $P(R_x)$ und $\eta(R_x)$ eine negative Wirkung aus.

Die obigen Diskussionen zeigen, daß eine 2...3 fache Steigerung der Kapazitäten C eine ungefähr fünfzigprozentige Verminderung des Ausgangsswiderstandes des Umformers des MT 25 bedingen, und daß eine weitere Steigerung dieser Kapazitäten keine Vorteile bringt.

4.4. Simultane Steigerung der Frequenz und der Kapazitäten C

Es wurden folgende Werte angenommen: $C = 0{,}0125$ μF — die Schachtel des Apparates bleibt unverändert, $f = 1\,000$ Hz — ein noch zulässiger Wert für den aktuellen Umspanner mit Transformatorblechen, wenn diese eine entsprechende Qualität aufweisen.

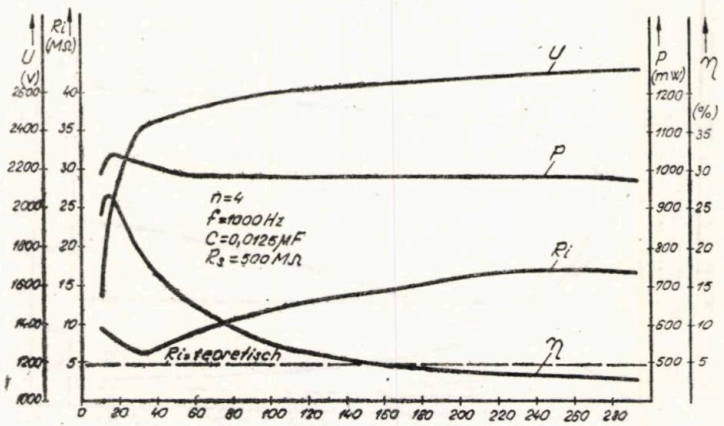


Abb. 11

Die Resultate der Versuche sind in Abb. 11 dargestellt. R_i schwankt zwischen 6...17 MΩ — Mittel 11,5 MΩ, d. h. daß dieser Weg keine Vorteile gegenüber der beiden vorher diskutierten Situationen (Abb. 8 und 9) mit sich bringt.

5. Schlußfolgerungen

Es gibt drei Möglichkeiten den Ausgangswiderstand des Umformers des rumänischen Widerstandsmessers MT 25 zu verringern: a) Verminderung der Stufenanzahl des Spannungsvervielfältigers von 4 auf 2, b) Steigerung der Kapazität der Kondensatoren des Spannungsvervielfältigers, c) Steigerung der Arbeitsfrequenz des Wechselrichters.

Von diesen Möglichkeiten hat die erstere weniger Bedeutung, die letzte kann aber nur in dem Falle angewendet werden, wenn der Transformatorkern aus einem entsprechenden Material hergestellt wird.

Die Steigerung der Kapazitäten der Kondensatoren des Spannungsvervielfältigers von 0,005 μF auf 0,0125 μF bedingt eine Reduzierung des Ausgangswiderstandes auf etwa die Hälfte, ohne daß Schachteländerungen des Apparates notwendig wären. Eine solche Lösung kann in der Praxis fast ohne zusätzliche Unkosten verwirklicht werden.

Eingegangen am 2. Febuar 1973

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Grundlagen der
Elektrotechnik und Elektrische
Messungen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Merkel J., *Ein Isolationsmesser mit transistorierte Gleichspannungswandler.* ATM, *417*, 217–220 (1970).
2. * * * Ministerul Energiei Electrice: *Catalog de produse IRME*, 11 (1970).
3. Felea I. u. a., *Circuite cu tranzistoare în industrie.* Vol. 2, Ed. Tehn., Buc., 1964, cap. 10.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA CREŞTERII VITEZEI DE LUCRU LA MEGOHMMETRUL ROMÂNESC DE 2 500 V

(Rezumat)

Se arată că principala cauză a vitezei de lucru reduse la megohmmetrul românesc de 2 500 V (durata unei măsurări 30 ...80 sec) o constituie valoarea ridicată a rezistenţei de ieşire (≈ 20 MΩ) la convertorul tranzistorizat de alimentare. Se prezintă rezultatele cercetărilor experimentale legate de micşorarea acestei rezistenţe pe calea creşterii frecvenţei de lucru a convertorului sau a capacităţii condensatoarelor multiplicatorului de tensiune. Se arată că dublarea capacităţii constituie o cale simplă şi ieftină care permite, practic, dublarea vitezei de lucru a aparatului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C.Z. 621.317.373; 621.317.61

METODĂ DIFERENŢIALĂ PENTRU DETERMINAREA COSINUSULUI UNGHIULUI ELECTRIC ŞI A RAPORTULUI AMPLITUDINILOR A DOUĂ TENSIUNI SINUSOIDALE, DE ACEEAŞI FRECVEANŢĂ, PRIN REALIZAREA EGALITĂŢII MODULELOR *)

DE

M. CREŢU

1. Introducere

Pentru măsurarea indirectă a unghiului electric, respectiv a raportului amplitudinilor a două tensiuni sinusoidale de aceeaşi frecvenţă, se folosesc în mod curent procedee similare încercărilor transformatoarelor de măsură sau, pentru determinări de precizie mai redusă, metoda celor trei voltmetre [2].

Posibilităţi suplimentare pentru măsurarea acestor parametri apar prin utilizarea circuitelor de măsură cu indicatoare diferenţiale de nul.

În această lucrare s-a folosit ca indicator diferenţial de nul, în vederea determinării cosinusului unghiului electric şi a raportului amplitudinilor a două tensiuni de joasă frecvenţă, un electrometru cu cadrane.

2. Principiul metodei

Se consideră două tensiuni sinusoidale de aceeaşi frecvenţă, defazate cu un unghi φ (fig. 1). Circuitul de măsurare conţine în afara electrometrului, conectat ca indicator diferenţial, şi un divizor rezistiv de tensiune, R. Tensiunea $\underline{U}_1$, de amplitudine mai ridicată, se aplică la una din intrările indicatorului diferenţial prin intermediul divizorului, iar tensiunea $\underline{U}_2$, de amplitudine compatibilă cu limita superioară de măsurare a electrometrului, se aplică direct.

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, 2—4 iulie 1970

Pentru obţinerea „echilibrului" se reglează cursorul divizorului R iar din condiţia anulării la „echilibru" a cuplului motor al electrometrului, rezultă egalitatea:

$$U_1' = U_2.$$

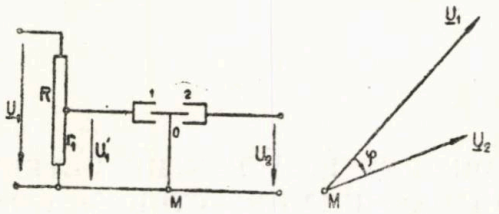


Fig 1.

Deoarece $U_1' = (r_1/R)\, U_1$, raportul modulelor celor două tensiuni este:

$$K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{r_1}{R} \quad (1)$$

Pentru determinarea cosinusului se modifică conexiunea intrărilor indicatorului diferenţial conform montajului din fig. 2, „echilibrul" realizîndu-se de asemenea prin reglarea cursorului divizorului rezistiv R.

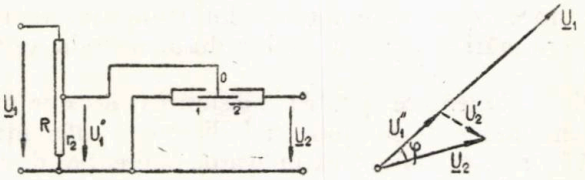


Fig. 2.

Cuplul motor al electrometrului este:

$$M = K(U_1''^2 - U_2'^2),$$

unde:

$$U_2'^2 = U_1''^2 + U_2^2 - 2U_1''U_2 \cos\varphi \quad \text{şi} \quad U_1'' = \frac{r_2}{R} U_1.$$

Anularea la „echilibru" a cuplului motor al electrometrului conduce la relaţia:

$$\cos\varphi = \frac{r_1}{2r_2}. \quad (2)$$

Aplicații ale acestei metode se pot întrevedea la etalonarea în grade electrice a defazoarelor de mică putere, fiind necesar un consum foarte mic, sau la determinarea erorilor transformatoarelor de tensiune.

3. Erori de metodă

Aplicînd principiul clasic de calcul a erorilor, relațiilor anterioare (1) și (2), se obține:

$$\frac{\Delta K_u}{K_u} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta r_1}{r_1} \quad , \quad \frac{\Delta \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2}.$$

Se observă că în aceste relații intervin numai erorile relative de construcție ale potențiometrului rezistiv. În afara acestora apar, în ambele măsurări, erori sistematice suplimentare datorită consumului electrometrului. Se poate arăta însă că aceste erori sînt cu totul neglijabile în cazul frecvențelor joase 5]. De exemplu, pentru $f = 10\,000$ Hz, $C_0 = 20$ pF și $r_1 = 10$ kΩ, eroarea elativă comisă asupra raportului tensiunilor este mai mică decît 10^{-4}.

4. Rezultate experimentale

Utilizînd metoda expusă a fost măsurat unghiul de întîrziere magnetică pentru un miez feromagnetic moale, determinîndu-se totodată și puterea de pierderi în fier.

Măsurarea pierderilor în materialele feromagnetice prin metoda wattmetrului (E p s t e i n) are în general o precizie redusă datorită pierderilor prin efect J o u l e în instrumentele de măsură. În cazul inducțiilor mici puterea consumată de aparatele de măsură ajunge să fie mai mare decît puterea de pierderi în fier ceea ce face necesară utilizarea instrumentelor electrostatice sau a metodelor indirecte de nul. Cu o precizie de asemenea redusă se determină indirect și unghiul de întîrziere magnetică [2].

Circuitul de măsurare utilizat este constituit din miezul magnetic de cercetat pe care se dispun două înfășurări (asemănătoare cu înfășurările aparatului E p s t e i n), o rezistență potențiometrică montată în serie cu înfășurarea primară, un voltmetru indicator plasat la capetele rezistenței potențiometrice și indicatorul diferențial de nul (fig. 3).

Neglijîndu-se consumul electrometrului se poate considera că ampermetrul A, din circuitul primar, indică numai curentul de magnetizare a miezului magnetic, curentul secundar fiind practic nul.

Datorită pierderilor în fier, în afara componentei reactive a curentului de magnetizare $I_{0\mu}$, determinată de reactanța înfășurării, se pune în evidență și componenta activă I_{0a}, determinată de conductanța activă corespunzătoare pierderilor. Unghiul de întîrziere magnetică (δ — fig. 3), respectiv

unghiul φ cu care curentul $\underline{I}_0$ este defazat în urma t. e. m. primare, se poate calcula cu relația:

$$\cos \varphi = \sin \delta = \frac{P_{Fe}}{E_2 I_0}.$$

Erorile cumulate care apar în acest caz sînt importante datorită numărului mare de instrumente utilizate în regim de deviație precum și datorită erorilor proprii măsurării pierderilor în fier. Procedeul diferențial propus în această lucrare înlătură parțial unele din aceste erori.

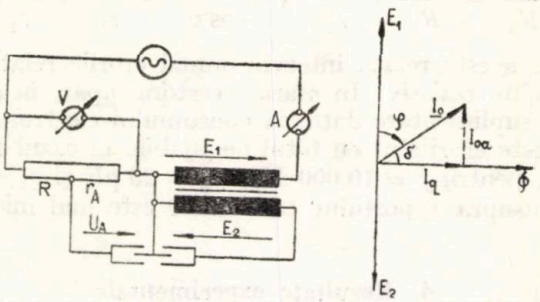


Fig. 3

În prima etapă se reglează cursorul rezistenței potențiometrice pînă cînd la „echilibru" indicatorul diferențial pune în evidență egalitatea modulelor tensiunilor E_2 și U_A. Fie r_A valoarea rezistenței cuprinse între cursor și capătul din dreapta iar U tensiunea măsurată la bornele rezistenței R (fig. 3). Se poate scrie egalitatea $U/U_A = R/r_A$, dar cum $U_A = E_2$ rezultă:

$$E_2 = \frac{r_A}{R} U.$$

În etapa a doua se modifică conexiunile intrărilor indicatorului diferențial conform fig. 4 iar „echilibrarea" se realizează prin modificarea, cu ajutorul rezistenței potențiometrice, a modulului tensiunii U_B. Cuplul motor al electrometrului devine:

$$M = k(U_B^2 - U_C^2).$$

Dacă $\underline{U}_B$ și $\underline{U}_C$ sînt fazorii tensiunilor aplicate cadranelor, în baza diagramei reprezentate în fig. 4 se deduce:

$$U_C^2 = U_B^2 + E_2^2 - 2\,U_B\,E_2 \cos(90° - \delta),$$

încît

$$M = k\,(E_2^2 - 2U_B\,E_2 \sin \delta).$$

Anularea la „echilibru" a cuplului motor conduce la relaţia:

$$\sin \delta = \frac{E_2}{2U_B} \quad \text{sau} \quad \delta = \arcsin \frac{E_2}{2U_B}.$$

Dacă r_B reprezintă valoarea rezistenţei potenţiometrice din etapa a doua, deoarece $U/U_B = R/r_B$, rezultă:

$$\sin \delta = \frac{r_A}{2r_B} \quad \text{sau} \quad \delta = \arcsin \frac{r_A}{2r_B}.$$

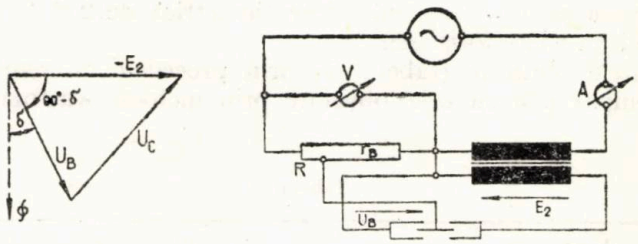


Fig. 4.

Se poate determina şi puterea de pierderi în fier:

$$P_{Fe} = \mathcal{R}e(\underline{E}_2 \underline{I}_0^*) = E_2 I_0 \cos(\underline{E}_2, \underline{I}_0) = E_2 I_0 \sin \delta$$

sau:

$$P_{Fe} = UI_0 \frac{r_A^2}{2r_B R}.$$

Calculul erorilor conduce la relaţia:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{d\left(\arcsin \frac{r_A}{2r_B}\right)}{\arcsin \frac{r_A}{2r_B}} = \frac{1}{\arcsin \frac{r_A}{2r_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_A}{2r_B}\right)^2}} \cdot \frac{r_A}{2r_B} \left(\frac{\Delta r_A}{r_A} + \frac{\Delta r_B}{r_B}\right),$$

care se poate simplifica utilizînd dezvoltarea în serie a funcţiei arc sin $(r_A/2r_B)$. Cum unghiul de întîrziere magnetică are, în general, valori mici, raportul $r_A/2r_B$ este sensibil subunitar şi se pot reţine numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie, obţinîndu-se în final:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r_A}{2r_B}\right)^2\right] \sqrt{1 - \left(\frac{r_A}{2r_B}\right)^2}} \left(\frac{\Delta r_A}{r_A} + \frac{\Delta r_B}{r_B}\right).$$

Se poate calcula, de asemenea, eroarea relativă de determinare a puterii de pierderi în fier:

$$\frac{\Delta P_{Fe}}{P_{Fe}} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I_0}{I_0} + 2\frac{\Delta r_A}{r_A} + \frac{\Delta r_B}{r_B} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Orientativ s-a efectuat o verificare experimentală determinîndu-se parametrii P_{Fe} şi sin δ prin procedeul expus şi, în aceleaşi condiţii de deformare a fluxului magnetic, prin metoda wattmetrului.

S-a utilizat în acest scop un circuit magnetic închis cu caracteristicile: $G_{Fe} = 10$ kg, $S_{Fe} = 9$ cm^2, $n_1 = n_2 = 500$ spire, un wattmetru D-539 (clasă de precizie 0,5), o rezistenţă potenţiometrică de 242 Ω şi un electrometru G. Bartels-Göttingen.

Rezultatele obţinute (tabelul 1) prin procedeul diferenţial (coloanele 5-6) sînt comparabile cu cele obţinute prin metoda wattmetrului (coloanele 8-9).

Tabelul 1

Nr. crt.	I A	U V	r_A Ω	r_B Ω	sin δ	P_{Fe} W	E_2 V	P_{Fe} W	sin δ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,15	37,2	49,3	164	0,151	0,172	7,56	0,175	0,153
2	0,20	50,5	51,9	234,8	0,110	0,237	10,7	0,233	0,109
3	0,25	60,2	55,2	188,0	0,147	0,506	13,7	0,502	0,146
4	0,30	74,4	56,3	204,0	0,138	0,716	17,3	0,720	0,138
5	0,35	84,4	58,5	210,1	0,133	0,955	20,3	0,958	0,132
6	0,40	99,6	58,1	214,0	0,134	1,281	23,9	1,290	0,135
7	0,45	111,0	59,8	238	0,128	1,580	27,5	1,585	0,127

5. Concluzii

Faţă de metodele clasice, obişnuite, metoda diferenţială pentru măsurarea unghiului electric şi a raportului amplitudinilor a două tensiuni, prezentată mai sus, are următoarele avantaje:

1. Necesită o aparatură simplă (un indicator diferenţial şi un divizor rezistiv), accesibilă, iar „echilibrarea" circuitului se realizează prin modificarea unui singur element de circuit.

2. Întrucît se determină valoarea funcţiei cosinus, precizia măsurării va fi sporită în cazul defazajelor, mari, apropiate de 90°.

3. Metoda se poate adapta cu uşurinţă pentru determinarea unghiului de întîrziere magnetică şi a puterii de pierderi în fier.

Primită la 11 octombrie 1973

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Bazele electrotehnicii
şi măsurări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Choudhury J. K., *Use of an Electrostatic Wattmeter as a. c./d. c. Comparator.* Proc. of I. E. E., *8*, 1171–1172 (1967).
2. Kinard I., *Applied Electrical Measurements.* John Wiley § Sons, New-York, 1956, 219, 331–333.
3. Neiman L. R., Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii,* (trad. din l. rusă). Vol. II, EES, Buc., 1955, 259–261.
4. Pflier J., *Elektrische Messgeräte und Messverfahren.* Springer Verlag, Berlin, 1963, 154.
5. Stanek I., *Technik elektrischer Messgeräte.* Technik Verlag, Berlin, 1963, 132–140.

DIFFERENTIELLE METHODE ZUR BESTIMMUNG DES ELEKTRISCHEN WINKELSCOSINUS UND DES AMPLITUDENQUOTIENTS VON ZWEI SPANNUNGEN DURCH REALISIERUNG DER MODULENGLEICHHEIT

(Zusammenfassung)

Es wird eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Winkelscosinus und das Amplitudenquotients von zwei Spannungen durch Verwendung eines Messungskreis mit differentiellen Nullanzeiger präsentiert. Als Anwendung der Methode wird auf ein differentielles Verfahren für Messung des magnetischen Verspätigungswinkels und der Eisenverlustsleistung hingewiesen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ, AUTOMATIZĂRI

C. Z. 621.314.224 ; 621.3.088.2

CONSIDERAȚII ASUPRA METODEI ELECTRONICE DE COMPENSARE A ERORILOR TRANSFORMATORULUI DE CURENT *)

DE

ELENA AGAFIȚEI și ADRIAN CREȚU

1. Introducere

Metoda electronică de compensare a erorilor se aplică în cazul în care se cere ca transformatorul de curent să prezinte o precizie de măsurare deosebit de ridicată la o variație a sarcinii într-un domeniu larg. De asemenea, ea poate fi utilizată la îmbunătățirea preciziei transformatoarelor de curent gata construite și conectate la rețea [1].

2. Erorile transformatorului de curent

Eroarea de raport a unui transformator de curent [3], fără corecție de spire, este dată de relația :

$$\varepsilon_i = \frac{I_{1m} - I_1}{I_1} = \frac{k_N I_2 - I_1}{I_1} = \frac{I_2 - I_1'}{I_1'} = -\frac{I_1' - I_2}{I_1'}, \tag{1}$$

în care : I_{1m} reprezintă valoarea măsurată a curentului primar, I_1 și I_2 sînt valorile reale ale curenților primar și secundar, I_1' este valoarea curentului primar raportat la secundar, k_N — raportul nominal de transformare al transformatorului.

Dacă se admite că unghiul de eroare δ_i (fig. 1), dintre fazorii curenților primar și secundar, este suficient de mic astfel încît cei doi fazori pot fi considerați paraleli, eroarea de raport devine [1] :

$$\varepsilon_i \approx -\frac{I_0' \sin(\alpha + \psi_2)}{I_1'}. \tag{2}$$

În mod analog, eroarea de unghi va fi dată de expresia :

*) Prezentată la sesiunea științifică jubiliară „60 ani de învățămînt electrotehnic în Iași", 21—23 decembrie 1972.

(2′) $$\delta_t \approx \sin \delta_t = \frac{I'_0 \cos(\alpha + \psi_2)}{I'_1}.$$

Se poate observa că atît eroarea de raport cît și cea de unghi sînt exprimate în funcție de curentul I_0 de mers în gol raportat la secundar.

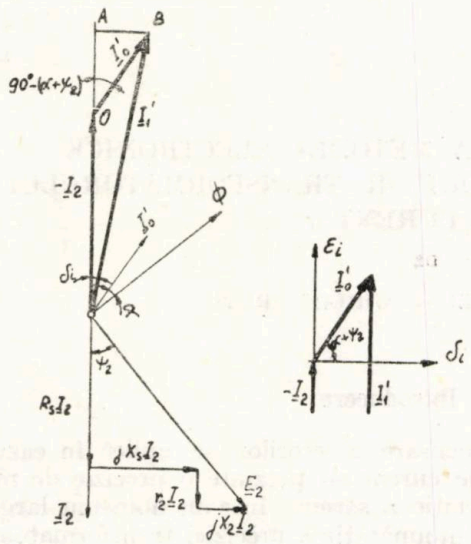


Fig. 1

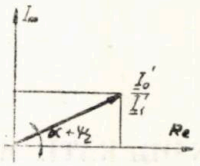


Fig. 2

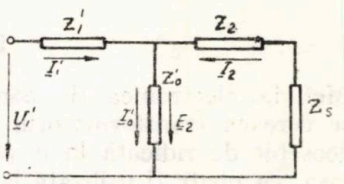


Fig. 3

Într-un sistem de axe rectangulare (fig. 2) valoarea relativă a fazorului curentului de mers în gol determină eroarea totală sau complexă:

(3) $$\alpha = \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_1} = \delta_t + j\varepsilon_t,$$

în care:

$$\delta_t = \frac{I'_0 \cos(\alpha + \psi_2)}{I'_1} = \mathcal{R}e \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_1}$$

și

$$\varepsilon_t = -\frac{I'_0 \sin(\alpha + \psi_2)}{I'_1} = -\mathcal{I}m \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_1}.$$

Din schema echivalentă a transformatorului (fig. 3) se deduce valoarea absolută a erorii complexe:

(4) $$|\underline{\alpha}| = \left|\frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_1}\right| = \left|\frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_0 - \underline{I}_2}\right| = \left|\frac{-\underline{E}_2/\underline{Z}_0}{-\underline{E}_2/\underline{Z}_0 - \underline{E}_2/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s)}\right| = \left|\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s + \underline{Z}_0}\right| \approx \left|\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}{\underline{Z}_0}\right|.$$

Relațiile (2) și (4) arată că erorile transformatorului de curent pot fi diminuate fie prin micșorarea curentului de magnetizare I_0, fie prin mărirea impedanței de magnetizare $\underline{Z}_0$. De asemenea, erorile transformatorului de curent sînt cu atît mai mari cu cît impedanța de sarcină $\underline{Z}_s$ este mai mare; de aceea este mai ușor de obținut un transformator de curent precis pentru o putere nominală redusă [1].

Micșorarea curentului de mers în gol se obține prin diferite măsuri constructive ca: mărirea secțiunii miezului magnetic, mărirea numărului de spire, folosirea materialelor magnetice cu permeabilitate inițială ridicată etc.

Reducerea erorilor transformatorului de curent se poate efectua și prin măsuri speciale de compensare, clasificate [2] în următoarele categorii:

a) Compensarea erorilor pe baza corectării curbei de magnetizare a materialului magnetic din care este realizat miezul.

b) Compensarea erorilor prin premagnetizarea miezului.

c) Metode directe de compensare, la care acțiunea de compensare este determinată de însăși eroarea transformatorului; aceste metode se numesc și metode cu autocompensare.

d) Compensarea erorilor unghiulare.

e) Compensarea erorilor transformatoarelor de curent prin comanda fluxului de dispersie.

3. Metoda electronică de compensare a erorilor

Dacă în secundarul unui transformator de curent se introduce o sursă de tensiune suplimentară u_α (fig. 4), care permite reglarea curentului secundar ca mărime și fază, se poate ajunge la situația în care solenația secundară echilibrează exact pe cea primară. În acest caz solenația de magnetizare și în mod corespunzător fluxul magnetic în miezul transformatorului sînt nule. Transformatorul de curent funcționează în regim de comparator de curent [4], deci practic fără eroare.

Pentru determinarea fluxului magnetic din miezul transformatorului se folosește un instrument de nul (IN) care măsoară tensiunea electromotoare indusă într-o înfășurare de indicator (N_3) plasată pe miezul transformatorului de curent.

În [1] Istvanfy și Sluszkiewicz au efectuat un studiu experimental al consecințelor substituirii sursei exterioare u_α, reglabilă manual, și a instrumentului de nul IN, cu un amplificator electronic; au obținut astfel un dispozitiv automat de compensare a erorilor transformatorului de curent.

Instalația experimentală utilizată este alcătuită din următoarele părți principale (fig. 5): a) transformatorul de curent TI cu clasa de precizie 3; b) schema *2* pentru compensarea căderii de tensiune interioare a transformatorului de curent; c) amplificatorul electronic *1*, de joasă frecvență.

Întrucît transformatorul de curent utilizat este prevăzut de la fabricație cu o corecție de spire, instalația mai conține un autotransformator *3* în scopul „recorectării" corecției numărului de spire.

Rezultatele deosebit de bune obținute cu această schemă au putut fi concretizate în următoarele concluzii:

1° Există posibilitatea compensării pe cale electronică a erorilor transformatorului de curent.

2° Prin acest procedeu orice transformator de precizie redusă (de exemplu clasa 3) poate fi adoptat fără modificări constructive pentru măsurări de înaltă precizie.

3° Transformatorul de curent compensat prin procedeul electronic își păstrează precizia deosebit de ridicată și la un multiplu al sarcinii nominale.

4° Domeniul de măsură al transformatorului de curent poate fi mult extins atît în domeniul curenților mici cît și în domeniul curenților intenși; această proprietate conduce la posibilitatea utilizării unui singur transformator, însoțit de dispozitivul de compensare electronică, în locul unui set de transformatoare de măsură.

În lucrarea citată, precum și în literatura de specialitate consultată, nu se dă nici o justificare teoretică a modului în care influențează amplificatorul electronic eroarea transformatorului de curent. De asemenea nu sînt indicate criteriile care stau la baza alegerii amplificatorului electronic, nefăcîndu-se nici o legătură cantitativă între parametrii transformatorului de curent și cei ai amplificatorului electronic necesar pentru asigurarea unei compensări optime.

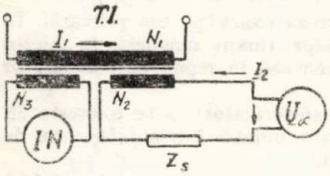


Fig 4.

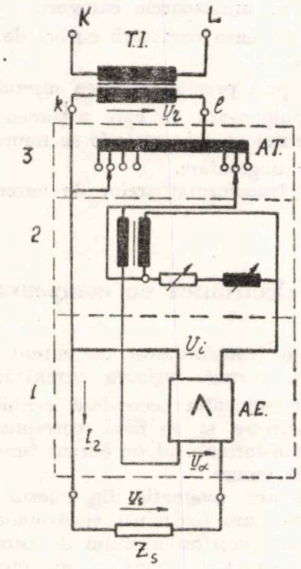


Fig. 5

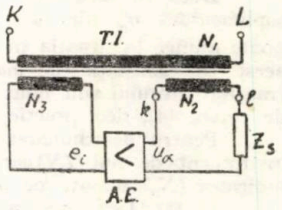


Fig. 6

În cele ce urmează, avînd în vedere deosebita importanță practică a procedeului propus în [1], se încearcă rezolvarea unora din problemele indicate mai sus. Pentru soluționarea acestor probleme se folosește schema de principiu a procedeului de compensare electronică reprezentată în fig. 6. Această schemă rezultă din cea redată în fig. 4 prin înlocuirea instrumentului de nul *IN* și a sursei u_α cu amplificatorul electronic *AE*. Bornele de intrare ale amplificatorului *AE* se conectează în locul instrumentului de nul *IN* iar bornele de ieșire se leagă în locul sursei u_α.

Compensarea automată a erorilor transformatoarelor de curent prin procedeul electronic poate fi explicată astfel. Dacă solenațiile primară și secundară ale transformatorului de curent *TI* nu se echilibrează reciproc ($N_2 i_2 \neq N_1 i_1$), în înfășurarea de indicator N_3 se induce o tensiune electromotoare e_i care se aplică la intrarea amplificatorului electronic *AE*. La ieșirea acestuia se obține tensiunea u_α care se aplică circuitului secundar N_2 al transformatorului de curent, dînd naștere unui curent i_α suplimentar.

Acest curent suplimentar se compune fazorial cu curentul i_2 existent în secundarul transformatorului, dînd naștere unui curent rezultant $i_{2\alpha}$. Solenația secundară rezultantă $N_2 i_{2\alpha} > N_2 i_2$ exercită asupra miezului transformatorului un efect demagnetizant mai important și, ca urmare, fluxul magnetic în miezul transformatorului se va micșora; corespunzător și erorile transformatorului se vor reduce.

Pentru a determina relația cantitativă între fluxul magnetic din miezul transformatorului de curent *TI* compensat electronic și amplificarea *A* a amplificatorului electronic *AE* utilizat, se va folosi schema echivalentă reprezentată în fig. 7.

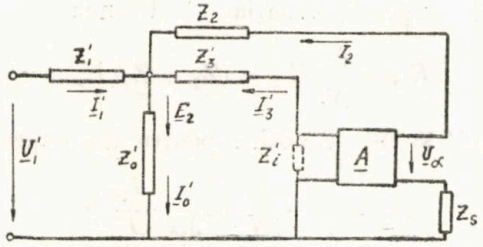


Fig. 7

Pentru cazul în care amplificatorul electronic *AE* nu ar fi introdus în circuitul secundarului (fig. 3), prin aplicarea teoremei de tensiuni a lui K i r c h h o f f acestui circuit, s-ar obține următoarea ecuație de tensiuni:

$$\underline{E}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_s\underline{I}_2. \tag{5}$$

Dacă înfășurarea de indicator (fig. 6) are N_3 spire iar înfășurarea secundară a transformatorului de curent *TI* are N_2 spire, atunci tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea de indicator, înainte de conectarea amplificatorului electronic *AE*, ar fi:

$$\underline{E}_i = \frac{N_3}{N_2}\underline{E}_2,$$

sau

$$\underline{E}_i = \frac{N_3}{N_2}(\underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_s\underline{I}_2). \tag{6}$$

După conectarea amplificatorului electronic, în circuitul secundar al transformatorului de curent (fig. 7) va apare și tensiunea suplimentară u_α, astfel încît ecuația de tensiuni a secundarului transformatorului devine de forma:

$$\underline{U}_\alpha + \underline{E}_{2\alpha} = \underline{Z}_2\underline{I}_{2\alpha} + \underline{Z}_s\underline{I}_{2\alpha}, \tag{7}$$

unde: $\underline{E}_{2\alpha}$ reprezintă tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea secundară a transformatorului de curent după conectarea amplificatorului electronic, $\underline{I}_{2\alpha}$ — curentul în circuitul secundar al transformatorului de curent după conectarea amplificatorului electronic.

Dar:

$$\underline{U}_{\alpha} = \underline{A}\underline{E}_{i\alpha}, \tag{8}$$

unde: $\underline{A}$ – amplificarea amplificatorului electronic AE, iar $\underline{E}_{i\alpha} = (N_3/N_2)\underline{E}_{2\alpha}$ — tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea de indicator după conectarea amplificatorului electronic.

Utilizînd aceste expresii, ecuația (7) devine:

$$\underline{A}\underline{E}_{i\alpha} + \frac{N_2}{N_3}\underline{E}_{i\alpha} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s)\underline{I}_{2\alpha}. \tag{9}$$

Din ecuațiile (6) și (9) se obține pentru $\underline{E}_{i\alpha}$ expresia:

$$\underline{E}_{i\alpha} = \frac{1}{1 + (N_3/N_2)\underline{A}} \cdot \frac{\underline{I}_{2\alpha}}{\underline{I}_2}\underline{E}_i \tag{10}$$

și, deoarece $A \gg 1$ și $N_3 > N_2$, se poate scrie relația:

$$\underline{E}_{i\alpha} \approx \frac{1}{(N_3/N_2)\underline{A}} \cdot \frac{\underline{I}_{2\alpha}}{\underline{I}_2}\underline{E}_i. \tag{11}$$

Prin urmare, după conectarea amplificatorului electronic, tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea de indicator se micșorează cu atît mai mult cu cît amplificarea A a amplificatorului electronic este mai mare și cu cît înfășurarea de indicator N_3 are mai multe spire.

În cele ce urmează se va exprima eroarea complexă $\underline{\alpha}$ a transformatorului de curent compensat electronic, funcție de parametrii amplificatorului, utilizînd în acest scop expresia generală a erorii complexe dată de relația (3) și schema echivalentă din fig. 7.

Dacă în relația (3) se înlocuiește curentul $\underline{I}'_1$ cu expresia determinată din ecuația de solenații a transformatorului, compensat electronic, ($\underline{I}'_0 = \underline{I}'_1 + \underline{I}_{2\alpha} + \underline{I}'_3$), se obține:

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_1} = \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_0 - \underline{I}_{2\alpha} - \underline{I}'_3}. \tag{12}$$

Curentul $\underline{I}_{2\alpha}$ din circuitul secundar al transformatorului de curent și curentul $\underline{I}'_3$ din înfășurarea de indicator se pot exprima funcție de curentul $\underline{I}'_0$ de magnetizare. În acest scop se aplică, mai întîi, teorema de tensiuni a lui Kirchhoff circuitului secundar al transformatorului de curent (fig. 7):

(13) $$\underline{E}_{2\alpha} + \underline{U}_{\alpha} = \underline{Z}_2\underline{I}_{2\alpha} + \underline{Z}_s\,\underline{I}_{2\alpha},$$

în care: $\underline{E}_{2\alpha} = -\underline{Z}_0\underline{I}'_0$ reprezintă tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea secundară a transformatorului de curent, $\underline{U}_{\alpha} = \underline{A}\underline{E}_{i\alpha}$ — tensiunea suplimentară aplicată circuitului secundar al transformatorului de curent iar $\underline{E}_{i\alpha} = (N_3/N_2)\underline{E}_{2\alpha}$ — tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea de indicator.

Înlocuind în relația (13) pe $\underline{E}_{2\alpha}$ și $\underline{U}_{\alpha}$ cu expresiile de mai sus se obține:

$$-\underline{Z}_0\underline{I}'_0 - \underline{A}\frac{N_3}{N_2}\underline{Z}_0\underline{I}'_0 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s)\underline{I}_{2\alpha},$$

de unde rezultă:

(14) $$\underline{I}_{2\alpha} = \frac{-\underline{Z}_0(1 + \underline{A}\,N_3/N_2)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}\,\underline{I}'_0\,.$$

Pentru a exprima curentul $\underline{I}'_3$ funcție de curentul de magnetizare $\underline{I}'_0$ se aplică teorema de tensiuni a lui Kirchhoff ochiului care conține impedanța $\underline{Z}'_3$ a înfășurării de indicator N_3, impedanța $\underline{Z}'_i$ de intrare a amplificatorului $\underline{A}\underline{E}$ și impedanța $\underline{Z}_0$ de magnetizare a transformatorului de curent (fig. 7). Se obține:

$$\underline{E}_{2\alpha} = (\underline{Z}'_i + \underline{Z}'_3)\,\underline{I}'_3\,,$$

sau

$$-\underline{Z}_0\underline{I}'_0 = (\underline{Z}'_i + \underline{Z}'_3)\underline{I}'_3\,,$$

de unde rezultă

(15) $$\underline{I}'_3 = -\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}'_i + \underline{Z}'_3}\underline{I}'_0.$$

Înlocuind în relația (12) curenții $\underline{I}_{2\alpha}$ și $\underline{I}'_3$, exprimați prin relațiile (14) și (15), rezultă:

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{I}'_0}{\underline{I}'_0 + \dfrac{\underline{Z}_0(1 + \underline{A}N_3/N_2)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}\,\underline{I}'_0 + \dfrac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}'_i + \underline{Z}'_3}\,\underline{I}'_0}\,,$$

sau:

(16) $$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s + \underline{Z}_0\left(1 + \underline{A}\dfrac{N_3}{N_2} + \dfrac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}{\underline{Z}'_i + \underline{Z}'_3}\right)}\,.$$

Analizînd expresia (16) a erorii complexe $\underline{\alpha}$ a transformatorului de curent compensat electronic rezultă că, independent de valoarea impedanței $\underline{Z}_s$ de sarcină și de valoarea impedanței $\underline{Z}_0$ de magnetizare, eroarea poate fi compensată prin alegerea unui amplificator electronic cu o amplificare A în tensiune cît mai mare și prin utilizarea unei înfășurări de indicator cu un număr de spire N_3 ridicat, concluzie care rezultă și din relația (11). În condițiile alegerii pentru amplificarea A și numărul de spire N_3 a unor valori ridicate se poate observa ușor că influența termenului $(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s)/(\underline{Z}'_3 + \underline{Z}'_i)$ asupra erorii complexe $\underline{\alpha}$ este practic neglijabilă, oricare ar fi valoarea impedanței de intrare $\underline{Z}'_i$ a amplificatorului electronic. Deci relația (16) arată că pentru asigurarea unei compensări optime este necesar un amplificator electronic cu $A \gg 1$, dar nu furnizează o indicație precisă asupra valorii necesare pentru impedanța $\underline{Z}'_i$ de intrare a acestui amplificator.

Alegerea impedanței de intrare $\underline{Z}'_i$ a amplificatorului electronic se va face ținînd cont de faptul că înfășurarea N_3 de indicator nu trebuie să perturbe regimul normal de funcționare al transformatorului de curent, adică, de fapt, curentul I_3 care parcurge această înfășurare trebuie să fie practic neglijabil; acest deziderat se realizează prin utilizarea unui amplificator cu impedanța de intrare $\underline{Z}'_i$ teoretic infinită.

4. Concluzii

1. Se justifică teoretic modul în care poate influența un amplificator electronic asupra erorilor unui transformator de curent; amplificatorul electronic AE introdus în secundarul N_2 al unui transformator de curent, ca în schema dată în fig. 5, are ca efect compensarea automată a erorilor acestuia.

2. Se determină relațiile de legătură între parametrii transformatorului de curent și cei ai amplificatorului electronic utilizat pentru compensarea erorilor.

3. Pentru ca amplificatorul electronic să asigure o compensare optimă a erorilor transformatorului de curent, într-o gamă largă de variație a sarcinii, este necesar ca amplificarea A în tensiune și impedanța $\underline{Z}_i$ de intrare a amplificatorului electronic utilizat să aibă valori ridicate; de asemenea, numărul de spire N_3 al înfășurării de indicator a transformatorului de curent trebuie să fie ridicat.

4. Avînd în vedere utilizarea practică a metodei electronice de compensare a erorilor transformatorului de curent, se vor întreprinde studii experimentale care să confirme rezultatele teoretice obținute.

Primită la 3 ianuarie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică generală și mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Istvanfy Gy., Sluszkiewicz Th., *Fehlerverminderung bei Stromwandlern mit Hilfe einer „negativen Burde"*. Periodica Polytechnica, Ungaria, **7**, *1*, 137–155 (1965).
2. Бачюрин Х. И., *Трансформаторы тока*. Изд. „Энергия", М.—Л., 1964.
3. Kopecek J., Dvorak M., *Transformatoare de măsură* (trad. din l. cehă). Ed. Tehn., Buc., 1970.
4. Kusters N. L., *Der Stromkomparator und seine Anwendung bei der Messung großer Wechsel- und Gleichströme*. Messtechnik, **76**, *10* (1968).
5. Millea A., Gruia N., *Determinarea erorilor transformatoarelor etalon de curent prin metoda comparatorului inductiv*. Metrologie aplicată, **11**, *6* (1964).

CONSIDERATIONS ON ELECTRONIC COMPENSATION METHOD OF CURRENT TRANSFORMER ERRORS

(Summary)

The principle of electronic compensation method of current transformer errors is presented. This method is used when it is asked a high accuracy for a wide variation of load.

The relationships between current transformer and electronic amplifier parameters are finally found out.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ ELECTRONICĂ AUTOMATIZĂRI

C. D. 512.9

SYNTHÈSE SIMULTANÉE D'UN GROUPE DE FONCTIONS LOGIQUES QUADRATIQUES INCOMPLÈTEMENT DÉFINIES*)

PAR

AL. VALACHI

1. Introduction

Dans les articles [1], [2] on a défini la notion de fonction logique quadratique et on a déterminé un algorithme de synthèse simultanée d'un groupe de fonctions

$$F^k = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} f_{ij}^k \, a_i \, b_j, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

ou sous la forme matricielle

$$F^k = a \barwedge Q^k \barwedge b, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

avec :

$$a = [a_1 \ldots a_i \ldots a_n], \qquad b = [b_1 \ldots b_j \ldots b_m], \qquad Q^k = [f_{ij}^k].$$

Dans cet article on propose une méthode de synthèse des fonctions logiques incomplètement définies (fonctions pour lesquelles il y a des valeurs f_{ij}^k indifférentes, [1]).

On utilisera aussi la formule de calcul du nombre de diodes nécessaires pour la synthèse du groupe (1), [2] :

$$N_D = 3 \sum_{j=1}^{N} \sum_{E} P_{k_1 \ldots k_j} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{E} (jX_{k_1 \ldots k_j} - Y_{k_1 \ldots k_j}), \tag{2}$$

avec

$$k_1, k_2, \ldots, k_j \in E \quad \text{et} \quad E = [1, 2, \ldots, N].$$

On a désigné par $P_{k_1 \ldots k_j}$ le poid de la matrice $B^{k_1 \ldots k_j}$ (matrice correspondante à la partie commune aux fonctions $F^{k_1}, F^{k_2}, \ldots, F^{k_j}$ [2]). Les termes $X_{k_1 \ldots k_j}$, $Y_{k_1 \ldots k_j}$, introduits aussi dans l'article [2], sont de la forme

*) Présentée lors de la session scientifique jubiliaire „60 ans d'enseignement électrotechnique à Jassy", 21—23 décembre 1972.

$$(3)\quad \begin{aligned} &X_{k_1 \dots k_j} = 1 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} \neq 0, \quad X_{k_1 \dots k_j} = 0 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} = 0, \\ &Y_{k_1 \dots k_j} = 1 \quad \text{si} \quad P_{k_1 \dots k_j} = 1, \quad Y_{k_1 \dots k_j} = 0 \ \text{si} \ P_{k_1 \dots k_j} \neq 1, \quad X_k = Y_k = 0. \end{aligned}$$

2. Synthèse d'un groupe de fonctions logiques incomplètement définies

Le nombre de diodes N_D nécessaires pour la synthèse des fonctions incomplètement définies est une fonction des coefficients f_{ij}^k indifférents.

On peut trouver la solution optimum, dans le cas de l'existence de q coefficients indifférents, en appliquant l'algorithme de synthèse [2], 2^q fois. En utilisant la méthode exacte le calcul devient assez compliqué, même à l'aide d'un calculateur numérique et on ne sait pas, pendant le calcul, la „distance" d'une solution quelconque par rapport à celle optimum.

On va exposer dans ce qui suit une méthode de détermination d'un optimum probable, méthode qui permet une réduction considérable du temps de calcul.

2.1. Théorème

Le premier terme de l'expression (2), $3 \sum_{j=1}^{N} \sum_{E} P_{k_1 \dots k_j}$, *dans le cas des fonctions logiques quadratiques incomplètement définies, est constant pour n'importe quelles valeurs imposées aux coefficients indifférents* f_{ij}^k.

Soit un groupe de fonctions logiques incomplètement définies F^k, avec les matrices correspondantes $Q^k = [f_{ij}^k]$, $(k = [1, 2, \dots, N])$.

On considérera les élements des matrices Q^k de la ligne u et de la colonne v. En supposant une série de termes constants (1 ou 0) et les autres indifférents, on peut écrire :

$$(4)\quad \begin{cases} f_{uv}^{k_j} = 1 & \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots r, \ r+1, \\ f_{uv}^{k_j} = i_{uv}^{k_j} & \text{pour} \quad j = r+1, \dots, s, \\ f_{uv}^{k_j} = 0 & \text{pour} \quad j = s+1, \dots, N. \end{cases}$$

On a désigné par $i_{uv}^{k_j}$ le terme indifférent de la ligne u et de la colonne v, appartenant à la matrice Q^{k_j}.

En utilisant l'expression des matrices qui correspondent aux fonctions communes $F^{k_1 \dots k_j}$, [2]:

$$B^{k_1 \dots k_j} = \left(\prod_{i=1}^{j} Q^{k_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=j+1}^{N} \bar{Q}^{k_i} \right),$$

on peut écrire

$$P_{k_1 \dots k_j} = P\left(B^{k_1 \dots k_j}\right) = \sum_u \sum_v f_{uv}^{k_1 \dots k_j}, \tag{5}$$

avec

$$f_{uv}^{k_1 \dots k_j} = \prod_{t=1}^{j} f_{uv}^{k_t} \cdot \prod_{t=j+1}^{N} \bar{f}_{uv}^{k_t}.$$

Dans les relations précédentes on a désigné par Π le produit logique. Donc, en tenant compte de (5), il en résulte:

$$\begin{cases} f_{uv}^{k_1 \dots k_r} = \prod_{t=1}^{r} f_{uv}^{k_t} \cdot \prod_{t=r+1}^{s} \bar{f}_{uv}^{k_t} \cdot \prod_{t=s+1}^{N} \bar{f}_{uv}^{k_t} = \prod_{t=r+1}^{s} \bar{i}_{uv}^{k_t} = \bar{i}_{uv}^{k_{r+1}} \prod_{t=r+2}^{s} \bar{i}_{uv}^{k_t}, \\ f_{uv}^{k_1 \dots k_r k_{r+1}} = \prod_{t=1}^{r+1} f_{uv}^{k_t} \cdot \prod_{t=r+2}^{s} \bar{f}_{uv}^{k_t} \cdot \prod_{t=s+1}^{N} \bar{f}_{uv}^{k_t} = i_{uv}^{k_{r+1}} \prod_{t=r+2}^{s} \bar{i}_{uv}^{k_t}. \end{cases} \tag{6}$$

Si l'on considère tous les coefficients indifférents fixés sauf $i_{uv}^{k_{r+1}}$, on peut écrire:

$$\begin{cases} P_{k_1 \dots k_r} = P'_{k_1 \dots k_r} + A\bar{i}_{uv}^{k_{r+1}}, \\ P_{k_1 \dots k_r k_{r+1}} = P'_{k_1 \dots k_r k_{r+1}} + Ai_{uv}^{k_{r+1}}. \end{cases} \tag{7}$$

Donc

$$P_{k_1 \dots k_r} + P_{k_1 \dots k_r k_{r+1}} = P'_{k_1 \dots k_r} + P'_{k_1 \dots k_r k_{r+1}} + A.$$

On a désigné par $P'_{k_1 \dots k_r}$, $P'_{k_1 \dots k_r k_{r+1}}$ les parties des poids $P_{k_1 \dots k_r}$, $P_{k_1 \dots k_r k_{r+1}}$, qui ne contiennent pas de coefficients indifférents.

Le raisonnement n'étant pas restrictif, il en résulte le théorème **2.1.**

Le nombre de diodes peut être écrit sous la forme,

$$N_D = N_0 + \Delta n, \tag{8}$$

où l'on a désigné par N_0 la partie constante de la formule (**3**) et par Δn, la partie variable, fonction de la valeur imposée aux coefficients indifférents. N_0 représente le minimum possible de diodes, qui est atteint pour $\Delta n = 0$.

2.2. Algorithme pour la détermination de N_0

Dans un de ceux 2^q cas des valeurs imposées aux q coefficients indifférents, on calculera à l'aide de l'algorithme décrit dans ce qui suit, Δn, donc N_0.

2.2.1. *Détermination de la contribution des coefficients indifférents*

On va introduire une nouvelle matrice C, définie par

$$C = \bigcup_{i=1}^{N} C^i. \tag{9}$$

La matrice C détermine la contribution des termes indifférents aux matrices $B^{k_1 \cdots k_p}$. $C^i = [c^i_{pq}]$ est une matrice binaire attachée à la fonction F^i, d'une telle manière que ses éléments satisfont à la relation

$$\begin{cases} c^i_{pq} = 1 \text{ pour } f^i_{pq} \text{ indifférents,} \\ c^i_{pq} = 0 \text{ pour } f^i_{pq} = 0 \text{ ou } 1. \end{cases} \tag{10}$$

La matrice $N^{k_1 \cdots k_p}$, définie à l'aide de l'expression (11), représente la contribution des coefficients indifférents à la matrice $B^{k_1 \cdots k_p}$:

$$N^{k_1 \cdots k_p} = B^{k_1 \cdots k_p} \, C. \tag{11}$$

En utilisant la relation (3) il en résulte la formule

$$\Delta n = \sum_{p=1}^{N} \sum_{E} (pX'_{k_1 \ldots k_p} - Y'_{k_1 \ldots k_p}). \tag{12}$$

L'algorithme proposé consiste dans la détermination des variables $X'_{k_1 \ldots k_p}$, $Y'_{k_1 \ldots k_p}$.

1. Si $P_{k_1 \ldots k_p} = 0$ il en résulte

$$X'_{k_1 \ldots k_p} = Y'_{k_1 \ldots k_p} = 0.$$

2. Si $P_{k_1 \ldots k_p} \neq 0$, on va calculer le poids de la matrice $N^{k_1 \cdots k_p}$:

$$P(N^{k_1 \cdots k_p}).$$

Dans cette situation on peut distinguer trois cas, à savoir:

2a. $P_{k_1 \ldots k_p} - P(N^{k_1 \cdots k_p}) > 1$, d'où il en résulte

$$X'_{k_1 \ldots k_p} = Y'_{k_1 \ldots k_p} = 0.$$

2b. $P_{k_1 \ldots k_p} - P(N^{k_1 \cdots k_p}) = 1.$

Il faut considérer encore deux situations:

$2b_1$. $P(N^{k_1 \cdots k_p}) = 0$, $\quad X'_{k_1 \ldots k_p} = Y'_{k_1 \ldots k_p} = 0$,

$2b_2$. $P(N^{k_1 \cdots k_p}) \neq 0$, $\quad X'_{k_1 \ldots k_p} = 1$, $\quad Y'_{k_1 \ldots k_p} = 0$.

2c. $P_{k_1 \dots k_p} - P(N^{k_1 \cdots k_p}) = 0,$

ou

2c$_1$. $P(N^{k_1 \cdots k_p}) = 1$ impose $X'_{k_1 \dots k_p} = Y'_{k_p \dots k_p} = 1$;

2c$_2$. $P(N^{k_1 \cdots k_p}) > 1$ impose $X'_{k_1 \dots k_p} = 1$, $Y'_{k_1 \dots k_p} = 0$.

En calculant Δn à l'aide de la relation (12) on déduit la valeur de N_0, à savoir $N_0 = N_D - \Delta n$, où N_D est calculé avec l'expression (3).

3. Exemple

Soit à synthétiser le groupe de fonctions F^1, F^2, F^3 qui ont les matrices :

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & i_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i_2 \\ 0 & 1 & 1 & i_3 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i_4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & i_5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a désigné par i_k les coefficients des termes indifférents.
On construit les matrices C_i qui indiquent la position des termes indifférents :

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la relation (9) il en résulte :

$$C = \bigcup_{i=1}^{3} C^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On va effectuer la synthèse des fonctions données pour des valeurs fixées par des termes indifférents, par exemple (0 1 0 0 0). Les matrices correspondantes dans ce cas sont :

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices correspondantes des fonctions communes sont :

$$B^{123} = Q^1.Q^2.Q^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{12} = Q^1.Q^2.Q^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{13} = Q^1.\overline{Q}^2.Q^3 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{bmatrix}, \quad B^{23} = \overline{Q}^1.Q^2.Q^3 = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix},$$

$$B^1 = Q^1.\overline{Q}^2.\overline{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \overline{Q}^1.Q^2.\overline{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \overline{Q}^1.\overline{Q}^2.Q^3 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}.$$

En calculant le nombre de diodes avec la formule (2), il en résulte $N_D = 43$. On calcule la contribution des termes indifférents :

$$N^{123} = B^{123}.C = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}, \quad N^{12} = B^{12}.C = [0],$$

$$N^{13} = B^{13}.C = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}, \quad N^{23} = B^{23}.C = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix},$$

$$N^1 = B^1.\ C = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = B^2.C = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix},$$

$$N^3 = B^3.C = [0].$$

Le calcul de Δn

1° $P(N^{123}) = 1$, $P_{123} - P(N^{123}) = 0$, donc $X'_{123} = Y'_{123} = 1$.

2° $P(N^{12}) = 0$, $P_{12} = 0$, donc $X'_{12} = Y'_{12} = 0$.

3° $P(N^{13}) = 1$, $P_{13} - P(N^{13}) = 2$, $X'_{13} = Y'_{13} = 0$.

4° $P(N^{23}) = 1$, $P_{23} - P(N^{23}) = 0$, donc $X'_{23} = Y'_{23} = 1$.

En utilisant la relation (12) il en résulte $\Delta_n = 3$ et $N_0 = N_D - \Delta n = 40$.

4. Conclusions

1. On présente une méthode de synthèse d'un groupe de fonctions incomplètement définies, qui permet à déterminer un optimum probable et facilite le calcul.

2. L'algorithme exposé peut être programmé sur une machine à calcul.

Reçue le 14 avril 1973

Institutut Polytechnique, Jassy,
Laboratoire de Programmation
et des Machines à calcul

BIBLIOGRAPHIE

1 Valachi Al., Lecocq H., *Considérations sur la synthèse des fonctions logiques quadratiques.* Revue A, XI, *2* (1969).
2 Valachi Al., Lecocq H., *Synthèse simultanée des fonctions logiques quadratiques.* Revue A, XI, *4* (1969).

SINTEZA SIMULTANĂ A UNUI GRUP DE FUNCȚII LOGICE PĂTRATICE INCOMPLET DEFINITE

(Rezumat)

Se prezintă o metodă originală de sinteză a funcțiilor logice pătratice incomplet definite.

Algoritmul stabilit în lucrare permite determinarea unui optimum probabil al numărului de diode, ceea ce reduce calculul.

Metoda descrisă este ușor programabilă la o mașină de calcul numeric.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

D. K. 621.313.333

ÜBER EINE KONSTRUKTIONSMETHODE DES STROMDIAGRAMMS DER EINPHASEN-ASYNCHRONMASCHINE *)

VON

AL. SIMION

1. Vorwort

Die Einphasen-Asynchronmaschine kann als eine symmetrische Dreiphasen-Asynchronmaschine betrachtet werden, die unter asymmetrischen Betriebsverhältnissen arbeitet, wobei der Strom einer Phase Null ist, während er in den beiden anderen Phasen denselben Wert I besitzt.

Im Falle die Maschine durch sinusförmige Spannung gespeist wird, kann man zur Darstellung der Größen: Spannung, Strom, Impedanz in der komplexen Zahlenebene greifen. Es ist bekannt, daß der Endpunkt des Stromvektors $\underline{I}$ einen Kreis beschreibt, wenn der Schlupf s veränderlich ist, während die speisende Spannung $\underline{U}$ und die Parameter der Maschine unverändert bleiben [1], [3], [5].

Im folgenden wird eine graphische Konstruktion des Kreisdiagramms des Stromes $\underline{I}$ mit Hilfe der Inversionsmethode dargestellt.

2. Die Ersatzschaltung der Einphasen-Asynchronmaschine

Beim Rechnen mit symmetrischen Komponenten ergibt sich [3], daß die Impedanz der Einphasen-Asynchronmaschine aus der Summe der mitlaufenden und der gegenlaufenden Impedanz besteht.

Die Ersatzschaltung der Maschine wird in Abb. 1 gezeigt, wo:

$$(1)\qquad \begin{cases} \underline{Z}_1 = r_1 + \mathrm{j}x_1, & \underline{Z}_m = r_m + \mathrm{j}x_m, \\ \underline{Z}'_{21} = \dfrac{r'_2}{s} + \mathrm{j}x'_2, & \underline{Z}'_{22} = \dfrac{r'_2}{2-s} + \mathrm{j}x'_2. \end{cases}$$

*) Mitgeteilt an der wissenschaftlichen Jubiläumstagung „60 Jahre elektrotechnischer Unterricht in Jassy", den 21.—23. Dezember 1972.

Demnach :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e1}+\underline{Z}_{e2}}, \tag{2}$$

wo :

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{1/\underline{Z}_m+1/\underline{Z}'_{21}}, \qquad \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{1/\underline{Z}_m+1/\underline{Z}'_{22}}, \tag{3}$$

die mitlaufende und die gegenlaufende Impedanz darstellt.

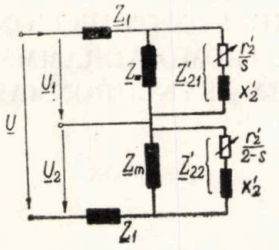


Abb. 1

Um die Konstruktion des Stromdiagramms durchzuführen, sollen zuerst die Diagramme der beiden Impedanzen $\underline{Z}_{e1}$ und $\underline{Z}_{e2}$ aufgestellt werden.

3. Die Diagramme der mitlaufenden und der gegenlaufenden Impedanzen

Man befolgt das in [2] angewandte Verfahren, jedoch unter Berücksichtigung einer Schlupfgeraden. Die Parameter: r_1, x_1, r_m, x_m, r'_2, x'_2 werden als bekannt vorausgesetzt. Es sind die Phasenparameter der symmetrischen Dreiphasen-Asynchronmaschine, aus der, wie angenommen wird, die Einphasenmaschine durch Unterbrechung einer Phase entstanden ist.

Die Gerade (Δ) stellt den geometrischen Ort des Endpunktes des Impedanzvektors $\underline{Z}'_{21} = r'_2/s + jx'_2$ dar, während der Kreis (C_1), durch Inversion der Geraden (Δ) erhalten, den geometrischen Ort des Endpunktes des Admittanzvektors $1/\underline{Z}'_{21}$ darstellt. Das Diagramm der Admittanz $1/\underline{Z}_m + 1/\underline{Z}'_{21}$ wird von dem Kreise (C_2) beschrieben, der durch die Parallelverschiebung des Kreises (C_1) mit konstanter Admittanz $1/\underline{Z}_m = \overline{O_0T}$ erlangt wurde. Für einen Schlupf s wird die Impedanz $\underline{Z}'_{21}$ durch das Segment $\overline{O_0M}$ dargestellt, die Admittanz $1/\underline{Z}'_{21}$ durch das Segment $\overline{O_0M'}$ (durch Inversion erzielt), $1/\underline{Z}_m + 1/\underline{Z}'_{21}$ durch $\overline{O_0M''}$, wobei der Punkt M'' durch den Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{O_0M'}$ aus T mit dem Kreis (C_2) bestimmt wird.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke O_0SO und O_0MI (OS ist eine Senkrechte zur reellen Achse) folgert man $\overline{OS} = s\,\overline{OO_0}\,.\,x'_2/r'_2$, das Segment $\overline{OS}$ kann also als Schlupfskala angewendet werden. Für den Kreis (C_2) kann sofort festgestellt werden, daß das Segment $\overline{O'S'}$, vom Schnittpunkt der Geraden $\overline{TM''}$ mit der Senkrechten (Δ_s) auf die Tangente in T zum Kreise (C_2) bestimmt, verhältnisgleich ist mit s. Demnach ist es möglich, die Gerade

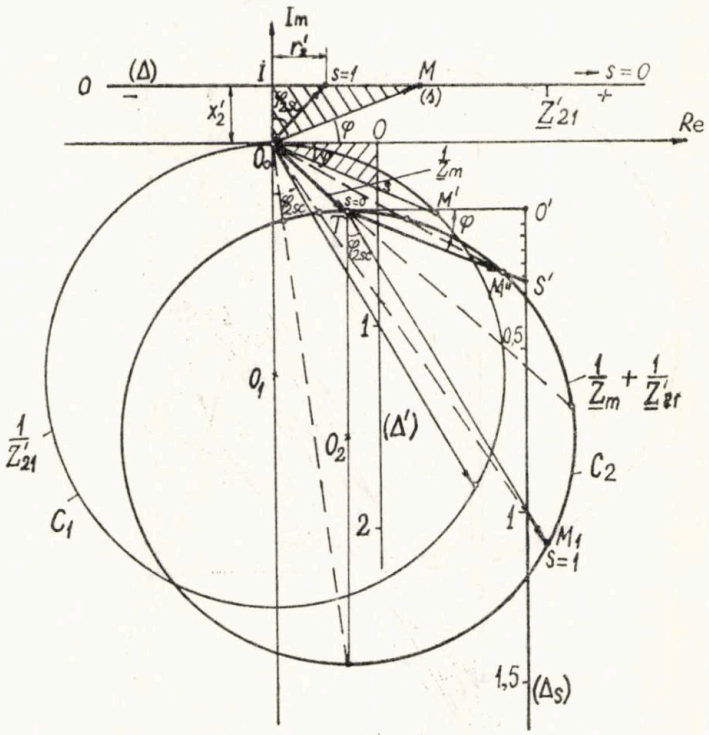


Abb. 2

(Δ_s) als Schlupfgerade für die Admittanz $1/\underline{Z}_m + 1/\underline{Z}'_{21}$ zu gebrauchen. Zu diesem Zweck wurde auch der dem Schlupf $s = 1$ entsprechende Punkt festgelegt, und zwar, aus T, einen Winkel von $\varphi_{2sc} = \text{arctg}\,(r'_2/x'_2)$ mit der negativen Scheinachse bildend, wurde die Gerade TM_1 (M_1 liegt auf (C_2)) gezogen, die Gerade $\overline{O_0M_1}$ schneidet (Δ_s) im Punkt *1*, entsprechend dem Schlupf $s = 1$. Hiermit gilt $s = \overline{O'S'}/\overline{O'1}$.

In Abb. **3** wurde der Kreis (C_3) mittels Inversion des Kreises (C_2) aufgezeichnet, mit dem Inversionsmittelpunkt O_0. Durch eine entsprechende Wahl der Skalen [2] kann der Kreis (C_3), der das Diagramm der Impe-

danz $1/(1/\underline{Z}_m + 1/\underline{Z}'_{21})$ darstellt, denselben Durchmesser besitzen wie der Kreis (C_2). Verlegt man durch Parallelverschiebung den Mittelpunkt der Abbildung aus (O_0) in (O'), wo $\overline{O'O_0} = \underline{Z}_1$, dann stellt der Kreis (C_3), in der

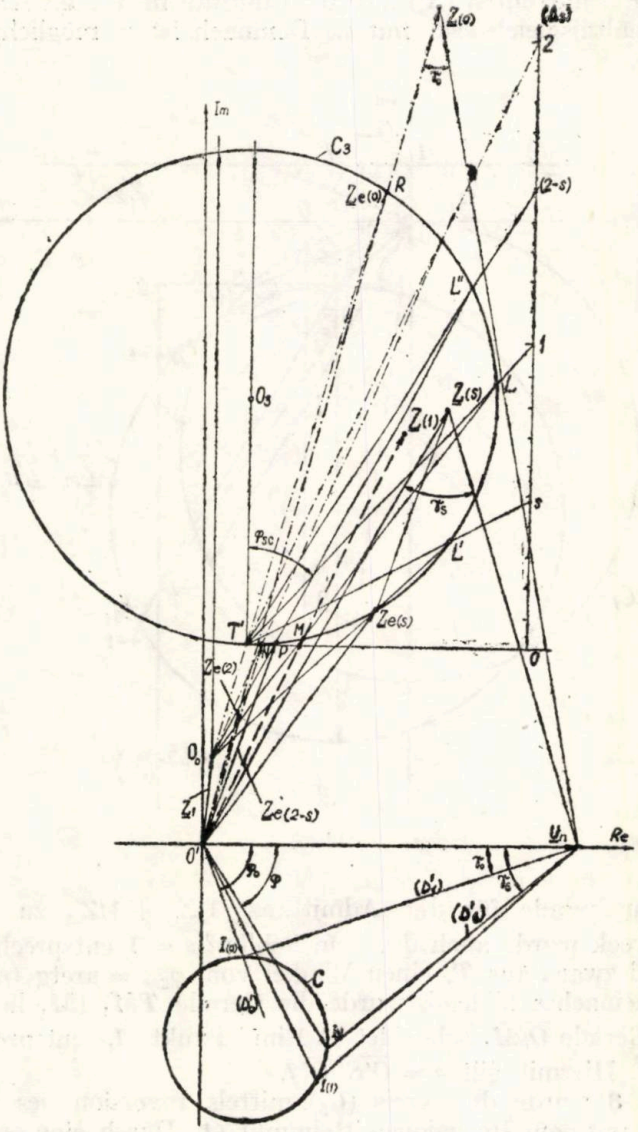


Abb. 3

Ebene ($\mathcal{R}e$, j $\mathcal{I}m$) aus Abb. 3 den geometrischen Ort der komplexen Impedanz dar:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + 1/(1/\underline{Z}_m + 1/\underline{Z}'_{21}).$$

Es ist ebenfalls möglich, eine Schlupfgerade zu bestimmen, und zwar, aus dem Mittelpunkt O_3 wird eine Parallele zur Scheinachse gezogen, welche den Kreis (C_3) in T' trifft; auf die Tangente in T' zum Kreis (C_3) wird eine beliebige Senkrechte in O aufgezeichnet, (Δ_s); durch T', mit der Neigung φ_{2sc} gegenüber $\overline{T'O_3}$, ziehen wir eine Gerade, die den Kreis (C_3) in L schneidet, die Gerade (Δ_s) im Punkt *1*. Die Gerade $\overline{O_0L}$ schneidet den Kreis (C_3) in M. Durch die Verdoppelung des Segmentes $\overline{O'M}$ erhält man den Punkt $\underline{Z}(1)$, der die Impedanz der einphasigen Maschine bei $s = 1$ darstellt. Die Schlupfgerade erzielt man durch die Teilung des Segmentes $\overline{O1}$ in gleiche Abschnitte. Auf dieser Geraden können auch noch andere Punkte bestimmt werden, zum Beispiel *2*, wenn $\overline{12} = \overline{O1}$.

Die dem Schlupf s äquivalente Impedanz wird nun folgendermaßen ermittelt:

Auf der Geraden (Δ_s) wird das Segment $\overline{OS} = s.\overline{O1}$ angenommen. Die Gerade $\overline{T'S}$ schneidet den Kreis (C_3) in L', $\overline{O_0L'}$ schneidet den Kreis (C_3) in $\underline{Z}_{e(s)}$. Das Segment $\overline{O\underline{Z}_{e(s)}}$ ist die Impedanz $\underline{Z}_{e(s)}$. Ausgehend von Punkt *2* wird auf Abschnitt $\overline{21}$ die Länge $\overline{OS}$ gemessen, welche dann durch den Punkt $2 - s$ aufgezeichnet wird.

Die durch T' und $2 - s$ gezogene Gerade schneidet den Kreis (C_3) in L''. Das Segment $\overline{O_0L''}$ schneidet den Kreis (C_3) in P. Der Abschnitt $\overline{O'P}$ ist die Impedanz $\underline{Z}_{e(2-s)}$. Addiert man $\underline{Z}_{e(s)}$ und $\underline{Z}_{e(2-s)}$, erhält man $\underline{Z}_{(s)}$, beziehungsweise die Impedanz der einphasigen Maschine für den Schlupf s.

In Abb. 3 wurde auch die totale Impedanz $\underline{Z}_{(0)}$ der einphasigen Maschine bei Schlupf $s = 0$ ermittelt, indem man die Vektorensumme der dem Schlupf $s = 0$ entsprechenden Impedanz $\underline{Z}_{e(0)}$ und der dem Schlupf $s = 2$ entsprechenden Impedanz $\underline{Z}_{e(2)}$ durchführte. Die Endpunkte der Impedanzen liegen auf dem Kreis (C_3).

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die Aufzeichnung des Diagramms der totalen Impedanz der einphasigen Maschine möglich ist, wenn man die Lage des Kreises (C_3) kennt.

Folgende Darlegungen geben eine vereinfachte praktische Konstruktionsmethode des Kreises (C_3) an, auf Grund zweier Versuche: bei Leerlauf und bei Kurzschlußbetrieb der einphasigen Maschine.

1° Der von der Geraden $\overline{O'O_3}$ und der Achse $\mathcal{I}m$ gebildete Winkel kann mittels Formel (17″) aus [2] bestimmt werden:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{2r_1}{(x_1 + x_m) + (x_1 + x'_2)}, \tag{4}$$

wobei $2r_1$ durch eine industrielle Methode gemessen wird. In bezug auf den Nenner wird die Ersatzschaltung aus Abb. 1 beim Leerlaufbetrieb der Maschine analysiert. Gilt $s \approx 0$, dann erhalten wir eine Ersatzschaltung wie in Abb. 4. Der zu $\underline{Z}'_{22}$ parallele Zweig $\underline{Z}_m$ kann vernachlässigt werden infolge des großen Verhältnisses zwischen x_m und x'_2.

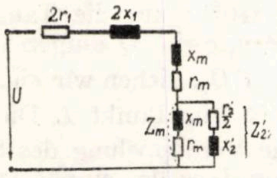


Abb. 4

Die totale Reaktanz der Maschine bei Leerlauf ist demnach die Summe $X = 2x_1 + x_m + x'_2$, bzw. der Nenner des Ausdrucks (4).

2° Beim Kurzschlußbetrieb wird der Punkt $\underline{Z}_{(1)}$ ermittelt. Die Mitte des Abschnittes $\overline{O'Z}_{(1)}$, M (Abb. 3), ist ein Punkt des Kreises (C_3).

3° Beim Leerlaufbetrieb wird der Punkt $\underline{Z}_{(0)}$ bestimmt, der dem Endpunkt der Summe $\underline{Z}_{e(0)} + \underline{Z}_{e(2)}$ entspricht. Die Endpunkte der Impedanzen $\underline{Z}_{e(0)}$ und $\underline{Z}_{e(2)}$ liegen auf dem Kreis (C_3).

Es wird nun eine annähernde Lage des Endpunktes der Impedanz $\underline{Z}_{e(0)}$ gesucht.

Aus dem Ersatzschema (Abb. 1) folgert man, daß die Impedanz $\underline{Z}_{e(2)}$ durch:

$$\underline{Z}_{e(2)} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_m \underline{Z}'_{2(2)}}{\underline{Z}_m + \underline{Z}'_{2(2)}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_m + \underline{Z}_1 \underline{Z}'_{2(2)} + \underline{Z}_m \underline{Z}'_{2(2)}}{\underline{Z}_m + \underline{Z}'_{2(2)}} \tag{5}$$

dargestellt wird.

Ebenso ist die Kurzschlußimpedanz:

$$\underline{Z}_{e(1)} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_m + \underline{Z}_1 \underline{Z}'_{2(1)} + \underline{Z}_m \underline{Z}'_{2(1)}}{\underline{Z}_m + \underline{Z}'_{2(1)}}. \tag{6}$$

Aus dem Verhältnis der beiden Impedanzen, wobei $\underline{Z}'_{2(1)}$ und $\underline{Z}'_{2(2)}$ im Vergleich zu $\underline{Z}_m$ vernachlässigt wird, ergibt sich:

$$\frac{\underline{Z}_{e(2)}}{\underline{Z}_{e(1)}} = \frac{r_1 + r'_2/2 + \mathrm{j}(x_1 + x'_2)}{r_1 + r'_2 + \mathrm{j}(x_1 + x'_2)}. \tag{7}$$

Wenn $r'_2 \approx r_1$ [1], entsteht das Verhältnis $\operatorname{tg} \varphi_{(2)} / \operatorname{tg} \varphi_{(1)} \approx 3/4$, wo $\varphi_{(2)}$ und $\varphi_{(1)}$ die von den Impedanzen $\underline{Z}_{e(2)}$ und $\underline{Z}_{e(1)}$ mit der Achse $\mathcal{J}m$ gebildeten Winkel sind.

Demnach können wir den Endpunkt der Impedanz $\underline{Z}_{e(2)}$ bestimmen, wenn der Endpunkt von $\underline{Z}_{e(1)}$, M, bekannt ist, indem wir durch M eine Parallele zur Achse $\mathcal{R}e$ aufzeichnen und ein Viertel des von der Achse $\mathcal{I}m$ auf dieser Parallele bestimmten Segmentes annehmen. Es sei dies der Punkt N. Wenn, vom Endpunkt $\underline{Z}_{(0)}$ ausgehend, der Abschnitt $\overline{O'N}$ abgezogen wird, erzielt man den Endpunkt der Impedanz $\underline{Z}_{e(0)}$, bzw. einen Punkt auf dem Kreise (C_3), R.

Sind nun zwei Punkte des Kreises (C_3) bekannt, M und R, sowie die Gerade auf der sich der Mittelpunkt befindet, ist es möglich, den Kreis (C_3) aufzuzeichnen.

Ist der Kreis (C_3) erst bekannt, kann nun eine lineare Schlupfskala aufgezeichnet werden und es können somit die Endpunkte der Impedanzen $\underline{Z}_{e1}$ und $\underline{Z}_{e2}$ für verschiedene Schlupfe nach der vorher angeführten Methode bestimmt werden.

4. Die Konstruktion des Stromdiagramms der einphasigen Maschine

Man nimmt an, daß der Leerlaufbetrieb des einphasigen Motors bei der Nennspannung $\underline{U}_n$ durchgeführt wird, wobei der aufgenommene Strom, $\underline{I}_0$, in Abb. 3 durch einen Vektor dargestellt, der Spannung $\underline{U}_n$ gegenüber um den Winkel φ_0 phasenverschoben ist. Dieser Winkel entspricht dem von der Impedanz $\underline{Z}_{(0)}$ und der Achse $\mathcal{R}e$ gebildeten Winkel. Der Endpunkt des Stromvektors $\underline{I}_0$ liegt im Schnittpunkt der Geraden (D'_0) mit der Geraden (D'_1), die durch $\underline{U}_n$ geht und den Winkel γ_0 mit der Achse $\mathcal{R}e$ beschreibt. Andererseits wird der Winkel γ_0 durch den Vektor $\underline{Z}_{(0)}$ und der bei der Verbindung des Endpunktes von $\underline{Z}_{(0)}$ mit $\underline{U}_n$ entstandenen Geraden gebildet. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgert man:

$$\overline{O'Z}_{(0)} \cdot \overline{O'I}_{(0)} = U_n^2 = K.$$

Bei anderen Schlupfen geht man in analoger Weise vor, da U_n konstant bleibt. Zum Beispiel, um den beim Schlupf s aufgenommenen Strom zu ermitteln: a) verbindet man $\underline{Z}_{(s)}$ mit $\underline{U}_n$, wobei γ_s bestimmt wird, b) zieht man durch $\underline{U}_n$, mit der Neigung γ_s zur Achse, die Gerade (D'_s), c) der Schnittpunkt dieser Geraden mit der symmetrischen Geraden der Impedanz $\underline{Z}_{(s)}$ gegenüber der Achse $\mathcal{R}e$ ist gerade der Endpunkt des Stromvektors $\underline{I}_{(s)}$.

In der Praxis kann man folgendermaßen vorgehen:

a) Beim Leerlaufbetrieb mit Nennspannung ermittelt man den Strom $\underline{I}_{(0)}$ (einen Punkt des Kreises (C)) und $\underline{Z}_{(0)}$.

b) Beim Kurzschlußbetrieb mit unbeweglichem Läufer bestimmt man $\underline{I}_{(1)}$ und $\underline{Z}_{(1)}$.

c) Mittels der bei diesen Versuchen erzielten Daten wird der Kreis (C_3) und eine Schlupfskala aufgezeichnet.

d) Für einen Schlupf s (beliebig) kann man $\underline{Z}_{(s)}$ und dann $\underline{I}_{(s)}$ graphisch ermitteln.

e) Man zeichnet dann den Kreis (C) durch die drei Punkte auf.

Der so konstruierte Kreis ermöglicht die Bestimmung der Ströme und der Leistungsfaktoren cos φ für jedwelche Werte von s.

5. Die Bestimmung des elektromagnetischen Moments der einphasigen Maschine

In Abb. 5 wurde der Kreis (C_3) der Impedanzen wieder aufgenommen, auf dem die den Schlupfen $s = 0$, $s = 1$ entsprechenden Punkte, also $\underline{Z}_{(0)}$, $\underline{Z}_{(1)}$, bei demselben Strom $\underline{I}$ ermittelt, aufgezeichnet sind. Wird der Strom $\underline{I}$ auf der Abszisse dargestellt, sind diese Impedanzen proportional der dem gleichwertigen Dreiphasen-Motor in dieser Betriebsweise zugeführten Spannungen. Es wird vorausgesetzt, daß der Leerlaufsbetrieb der einphasigen Maschine bei der Nennspannung $\underline{U}_{(0)} = \underline{U}_n$ erfolgte, wobei $\underline{I}$ der aufgenommene Strom ist. Demnach können die Impedanzen aus Abb. 5 als proportional der dem Motor zugeführten Spannungen angesehen werden, wenn der Strom konstant bleibt.

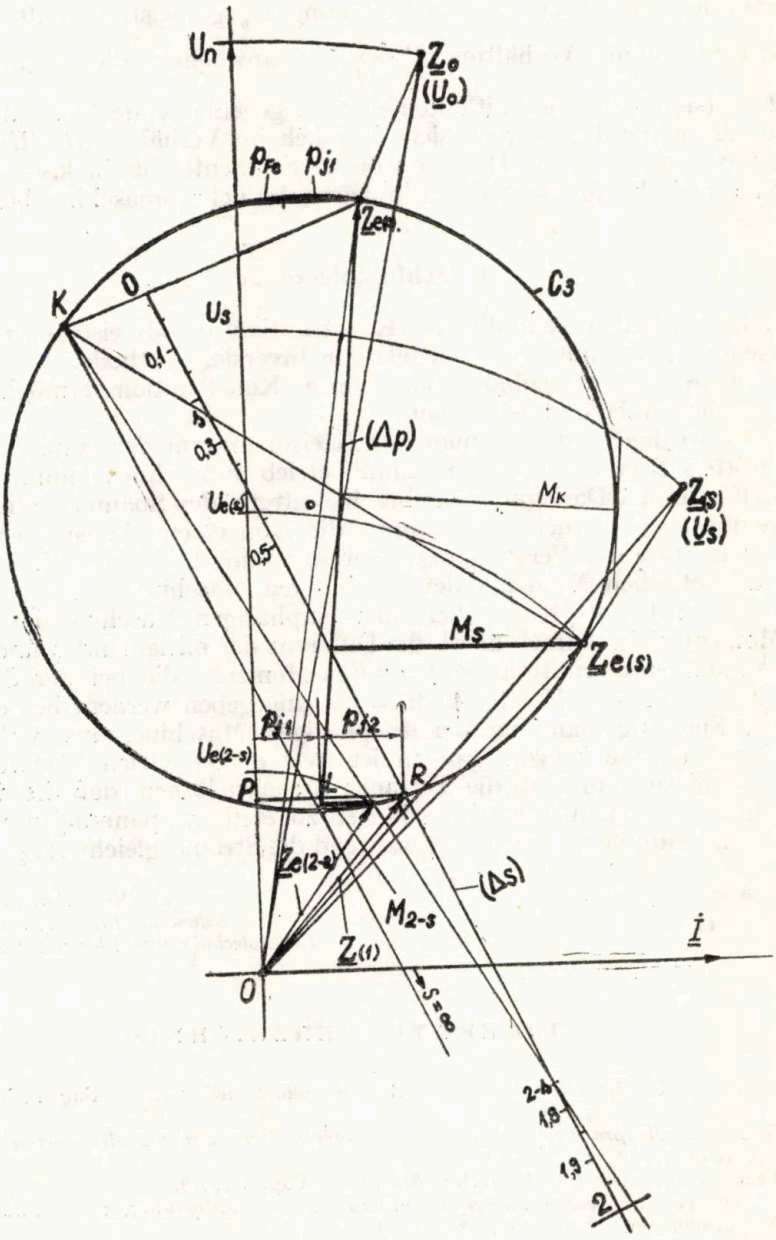
Der Punkt $\underline{Z}_{(0)}$ des Kreises (C_3) entspricht der Spannung, die den äquivalenten Dreiphasenmotor speist, wenn der von der Phase aufgenommene Strom $\underline{I}$ ist. Bei dieser Betriebsweise ist die vom Netz aufgenommene aktive Leistung gleich der Summe der Eisenverluste (p_{Fe}) und der Verluste in der Ständerwicklung (p_{j1}). Ist r_1 bekannt, kann p_{Fe} abgesondert werden. (Das stellt Abb. 5 dar).

Beim Kurzschlußbetrieb sind die vom Netz aufgenommenen Verluste $p_{j1} + p_{j2}$; kennt man p_{j1} und $p_{j1} + p_{j2}$, kann der Punkt L ermittelt werden, welcher dem Schlupf $s = \infty$ entspricht (in diesem Fall ist die vom Netz aufgenommene Leistung nur p_{j1}). Sind die Punkte $s = 0$, $s = 1$, $s = \infty$ bekannt, ist es möglich eine Schlupfskala aufzuzeichnen, wie es aus Abb. 5 ersichtlich ist.

Verbindet man die den Schlupfen $s = 0$ und $s = \infty$ entsprechenden Punkte des Kreises (C_3), wird die Gerade der elektromagnetischen Leistung (Δp) beschrieben.

Für einen andern Strom I' kann ein ähnliches Diagramm aufgezeichnet werden (wie in Abb. 5), aber mit einer andern Skala, wobei die Segmente, die in dem betreffenden Diagramm Ströme darstellen, im Verhältnis I'/I zu den Segmenten des Diagramms aus Abb. 5 sind.

Für den Schlupf s ist die den Einphasenmotor speisende Gesamtspannung U_s, wenn der Strom I ist. In Wirklichkeit aber wird der Ein-



Un
Zo
(Uo)
pFe
pj1
Ze(s)
C3
K
O
Us
0,1
0,3
(Δp)
Ue(s)
Mk
Z(s)
(Us)
0,5
Ms
Ze(s)
pj1
pj2
Ue(2-s)
P
R
Ze(2-s)
(Δs)
M2-s
Z(1)
I
O
s=∞
2-s
1,8
1,9
2

Abb. 5

phasenmotor von der konstanten Spannung U_n gespeist, so daß in diesem Falle der Strom im Verhältnis $I' = \frac{U_n}{U_s} I$ anwächst, die Segmente M_s und M_{2-s} (sie stellen das mitlaufende, bzw. gegenlaufende Moment der einphasigen Maschine dar) werden sich demnach im Verhältnis $(U_n/U_s)^2$ verändern. Führt man nun die Differenz dieser Segmente durch, kann man das elektromagnetische Moment der Einphasen-Asynchronmaschine bestimmen.

6. Schlußfolgerungen

1. Die Arbeit beschreibt die Konstruktion des Kreisdiagramms der Einphasen-Asynchronmaschine mittels der Inversionsmethode.

2. Diese nur scheinbar komplizierte Konstruktion ermöglicht eine lineare Schlupfskala und ist genau.

3. Es wird gezeigt, wie man das Kreisdiagramm der einphasigen Maschine mittels Leerlauf- und Kurzschlußbetrieb aufzeichnen kann.

4. Es werden Darlegungen gebracht betreffs des Spannungsdiagramms der dreiphasigen Asynchronmaschine, die von einem konstanten Strom gespeist wird und der Verwendung des Diagramms bei der Bestimmung des elektromagnetischen Moments der einphasigen Maschine.

5. Es wird gezeigt, daß bei einer einphasigen Maschine das resultierende Moment nicht einfach durch die Differenz der mitlaufenden und gegenlaufenden Momente ermittelt werden kann, Momente, die bei den Schlupfen s und $2 - s$ von der Kennlinie $M = f(s)$ angegeben werden, bei einer bestimmten Speisungsspannung der dreiphasigen Maschine, aus welcher die einphasige Maschine hervorgegangen ist (wie es bei vielen Verfassern der Fall ist), sondern man muß die Tatsache berücksichtigen, daß die den mitlaufenden und gegenlaufenden Impedanzen zugeteilten Spannungen verschieden sind (ihre Summe ist konstant), während die Ströme gleichwertig bleiben.

Eingegangen am 5. Mai 1973

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Allgemeine
Elektrotechnik und Elektrische Maschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Kovacs P. K., *Betriebsverhalten von Asynchronmaschinen.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1957, Kap. **10.**
2. Simion Al., *Asupra determinării exacte a diagramei cercului maşinii asincrone.* Electrotehnica, **10**, *8*, 305–309 (1971).
3. Dordea T., *Maşini electrice.* Ed. Tehn., Buc., 1970, Cap. **4.7, 4.9.**
4. Губенко Т. П., *Геометрические места токов индукционных машин.* Изд. Львовского Университета, 1960.
5. Костенко М. П., *Электрические машины. Специальная части.* ГЭИ, 1949, гл. XIV, XVI.
6. Lagron L., *Les moteurs à courants alternatifs.* Dunod, Paris, 1949, chap. VIII.

ASUPRA UNEI METODE DE CONSTRUCŢIE A DIAGRAMEI CURENTULUI MAŞINII ASINCRONE MONOFAZATE

(Rezumat)

Se propune o nouă metodă de construcţie a diagramei cercului maşinii asincrone monofazate, bazată pe metoda inversiunii. Această construcţie, care aparent este complicată, prezintă o scară a alunecărilor liniară şi este precisă.

Se arată modul în care se poate construi diagrama cercului maşinii monofazate, pe baza încercărilor de mers la gol şi în scurtcircuit.

Se fac consideraţii asupra diagramei tensiunii maşinii asincrone trifazate, alimentată la curent constant, şi folosirea ei la determinarea cuplului electromagnetic al maşinii monofazate.

Se arată că la o maşină monofazată cuplul rezultant nu se obţine prin simpla diferenţă a cuplurilor direct şi invers, considerate la alunecările s şi $2-s$, de pe caracteristica $M=f(s)$ la o anumită tensiune de alimentare a maşinii trifazate din care provine (cum se obişnuieşte de mulţi autori), ci trebuie considerat faptul că tensiunile repartizate pe impedanţele celor două succesiuni sînt diferite (suma lor este constantă), curenţii rămînînd în schimb aceiaşi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

C.Z. 621.313.333

CU PRIVIRE LA DIAGRAMELE DE FUNCȚIONARE ALE MAȘINII ASINCRONE

DE

I. ANDRONE

1. Introducere

Reprezentarea semnalelor alternative prin numere complexe, propusă de A. E. Kennelly în 1893, prezintă, așa cum se arată în [1], dificultăți legate de faptul că semnale foarte diferite ca natură sînt reprezentate prin același fel de mărime matematică. Impedanța și tensiunea, de exemplu, sînt fizic distincte, dar ele sînt obligate să se comporte în aceeași manieră din punct de vedere matematic.

Scopul principal al introducerii calculului complex a fost de a reduce teoria regimului permanent sinusoidal la simplitatea teoriei regimului staționar.

Ecuațiile în c. c.:

$$U = RI \quad \text{și} \quad (2) \qquad P = UI \tag{1}$$

sînt deci înlocuite prin ecuațiile în mărimi complexe:

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{și} \quad (4) \qquad \underline{S} = \underline{U}\underline{I}. \tag{3}$$

Analogia dintre (1) și (3) este perfectă dar ecuația (4) nu este adevărată. S-au propus pentru aceasta mai multe soluții și variante iar cea folosită aproape în exclusivitate astăzi este:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*, \tag{5}$$

unde I^* este mărimea complex conjugată a lui I. Nici pentru această soluție nici pentru altele, utilizînd mărimile complexe, nu există justificare logică.

Ambiguitatea ce se naște datorită calculului complex a fost eliminată în [1] prin introducerea noțiunii de *holor* de diverse tipuri și folosirea notațiilor cu indici și a regulilor calculului tensorial.

Astfel, un curent de forma:

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi) \tag{6}$$

este complet determinat de holorul:

$$I_j = [I_1 ; I_2], \tag{7}$$

unde :

(8) $$I_1 = I\cos\varphi \quad \text{și} \quad (9) \quad I_2 = I\sin\varphi.$$

Pentru impedanță s-a definit un nou holor bivalent :

(10) $$Z_{ij} = \begin{bmatrix} R & X \\ -X & R \end{bmatrix},$$

unde : $Z_{11} = R$, $Z_{12} = X$, $Z_{21} = -X$, $Z_{22} = R$.

Pentru putere s-a introdus un holor monovalent cu trei elemente :

(11) $$P_k = [P_0\,;\ P_1\,;\ P_2],$$

unde :

$$P_0 = Z_{11}I_1^2 + Z_{12}I_1I_2 + Z_{22}I_2^2, \qquad P_1 = R(I_1^2 - I_2^2) + 2XI_1I_2, \quad P_2 = X(I_2^2 - I_1^2) + 2RI_1I_2$$

$$\sqrt{P_1^2 + P_2^2} = UI.$$

În studiul funcționării circuitelor electrice de c. a. și deci și a mașinilor electrice de c. a. este necesar de obicei să se rezolve ecuații diferențiale sau integrale. În sensul metodei propuse în [1], trebuie determinați holorii corespunzători derivatei și integralei semnalelor alternative în raport cu timpul. Astfel, pentru curent, de exemplu, derivatei

(12) $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}(\omega t)},$$

n regim permanent sinusoidal, îi corespunde holorul :

(13) $$\int \omega I_j \mathrm{d}\varphi = \omega\left[\int I_1\,\mathrm{d}\varphi\,;\ \int I_2\mathrm{d}\varphi\right] = \omega\left[I_2\,;\ -I_1\right].$$

Pentru integrare se obține corespondența

(14) $$\int i\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int i\,\mathrm{d}(\omega t) \rightleftarrows \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\mathrm{d}I_j}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\omega}\left[-I_2\,;\ I_1\right].$$

Se remarcă faptul că operatorii $\mathrm{d}(\omega t)$ și $\mathrm{d}\varphi$ sînt adimensionali, lucru ce simplifică calculul.

2. Diagramele geometrice ale mașinii asincrone

Se va aplica metoda propusă pentru trasarea diagramelor de curenți la o mașină asincronă polifazată în regim permanent sinusoidal.

Aplicînd legea inducției electromagnetice și legea conducției pentru o fază a statorului se determină :

(15) $$u_1 = R_1 i_1 + L_{1\sigma}\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - u_{e1},$$

unde prin u_{e1} s-a notat t. e. m. indusă.

Această ecuație devine, în holori, de forma :

$$(U_1)_i = R_1(I_1)_j + \omega_1 L_{1\sigma} \int I_j d\varphi - (U_{e1})_i. \tag{16}$$

În formă dezvoltată ecuația (16) se poate scrie :

$$\begin{cases} (U_1)_1 = R_1(I_1)_1 + \omega_1 L_{1\sigma}(I_1)_2 - (U_{e1})_1 , \\ (U_1)_2 = R_1(I_1)_2 - \omega_1 L_{1\sigma}(I_1)_1 - (U_{e1})_2 , \end{cases} \tag{17}$$

sau

$$(U_1)_i = (Z_1)_{ij}(I_1)_j - (U_{e1})_i , \tag{18}$$

cu

$$(Z_1)_{11} = R_1, \quad (Z_1)_{12} = X_{1\sigma} , \quad (Z_1)_{21} = - X_{1\sigma} , \quad (Z_1)_{22} = R$$

și

$$\omega_1 L_{1\sigma} = X_{1\sigma} .$$

Dacă se notează :

$$- u_{e1} = z_0 i_{10} \tag{19}$$

adică :

$$- (U_{e1})_i = (Z_0)_{ij} (I_{10})_j , \tag{20}$$

atunci ecuația (18) devine :

$$(U_1)_i = (Z_1)_{ij}(I_1)_j + (Z_0)_{ij}(I_{10})_j . \tag{21}$$

Procedînd în mod similar pentru rotor ca și pentru stator și dacă se face raportarea mărimilor rotorice la frecvența și înfășurarea statorică atunci se determină sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} (U_1)_{ij} = (Z_1)_{ij}(I_1)_j + (Z_0)_{ij}(I_{10})_j, \\ 0 = (Z_2')_{ij}(I_2)_j + (Z_0)_{ij}(I_{10})_j, \\ (I_{10})_j = (I_1)_j + (I_2)_j. \end{cases} \tag{22}$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu curenții se determină :

$$(I_1)_j = \frac{(U_1)_j}{(Z_1)_{ij} + (Z_0)_{ij}} + \frac{(U_1)_i}{c(Z_1)_{ij} + c^2(Z_2')_{ij}} \equiv \equiv (I_{10}')_j + (I_2'')_i , \tag{23}$$

unde:

$$c = 1 + \frac{(Z_1)_{ij}}{(Z_0)_{ij}}. \tag{24}$$

Se poate scrie deci:

$$(U_1)_i = (Z_1)_{ij} + (Z_0)_{ij}(I'_{10})_j . \tag{25}$$

Cu notația:

$$(Z_1)_{ij} + (Z_0)_{ij} = (Z_{10})_{ij}$$

ecuația (25) devine:

$$(U_1)_i = (Z_{10})_{ij}(I'_{10})_j , \tag{26}$$

unde:

$$(Z_{10})_{ij} = \begin{bmatrix} R_1 + R_0 & X_{1\sigma} + X_0 \\ -(X_{1\sigma} + X_0) & R_1 + R_0 \end{bmatrix}.$$

Scrisă în detaliu ecuația (26) conduce la:

$$\begin{cases} (U_1)_1 = (Z_{10})_{11}(I'_{10})_1 + (Z_{10})_{12}(I'_{10})_2 , \\ (U_1)_2 = (Z_{10})_{21}(I'_{10})_1 + (Z_{10})_{22}(I'_{10})_2 , \end{cases} \tag{27}$$

în care:

$$(Z_{10})_{11} = R_1 + R_0 , \quad (Z_{10})_{12} = X_{1\sigma} + X_0,$$
$$(Z_{10})_{21} = -(X_{1\sigma} + X_0) , \quad (Z_{10})_{22} = R_1 + R_0 .$$

φ'_{10} fiind defazajul dintre u_1 și i'_{10}, ecuațiile (27) devin:

$$\begin{cases} U_1 = (R_1 + R_0)(I'_{10})_1 + (X_{1\sigma} + X_0)(I'_{10})_2 , \\ 0 = -(X_{1\sigma} + X_0)(I'_{10})_1 + (R_1 + R_0)(I'_{10})_2 , \end{cases} \tag{28}$$

dacă se alege tensiunea ca origine de fază și se consideră:

$$(U_1)_1 = U_1, \quad (U_1)_2 = 0 ,$$
$$(I'_{10})_1 = I'_{10}\cos\varphi'_{10}, \quad (I'_{10})_2 = I'_{10}\sin\varphi'_{10} . \tag{29}$$

Din ecuațiile (28) se pot determina componentele $(I'_{10})_1$ și $(I'_{10})_2$:

$$(I'_{10})_1 = U_1 \frac{R_1 + R_0}{(R_1 + R_0)^2 + (X_{1\sigma} + X_0)^2} , \tag{30}$$

$$(I'_{10})_2 = U_1 \frac{X_{1\sigma} + X_0}{(R_1 + R_0)^2 + (X_{1\sigma} + X_0)^2} . \tag{31}$$

Reprezentarea geometrică a ecuației (28) este redată în fig. 1, cu variabilele $(I'_{10})_1$ și $(I'_{10})_2$.

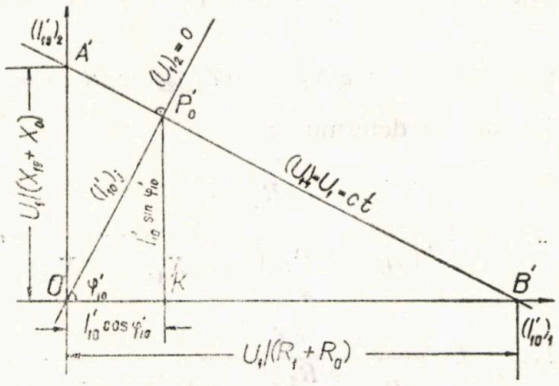


Fig. 1

Cele două drepte $(U_1)_1 = U_1 = \text{const.}$ și $(U_1)_2 = \text{const.} = 0$ sînt perpendiculare. La variația tensiunii de alimentare dreapta $(U_1)_1 = \text{const.}$ se va deplasa paralel cu ea însăși; în acest caz curentul i''_{10} va păstra defazajul φ'_{10} față de tensiune constant dar amplitudinea sa va varia. La variația reactanțelor sau rezistențelor se va modifica atît amplitudinea cît și faza curentului i''_{10}; dacă este necesar se poate determina o astfel de variație a reactanțelor și rezistențelor încît să se modifice numai defazajul iar amplitudinea să rămînă constantă. Proiecțiile segmentului $\overline{OP'_0}$ pe axele de coordonate determină componentele $(I'_{10})_1 = I'_{10}\cos\varphi'_{10} = \overline{OK}$, $(I'_{10})_2 = I'_{10}\sin\varphi'_{10} = \overline{KP'_0}$.

Defazajul φ'_{10} se poate determina din relația:

$$\operatorname{tg}\varphi'_{10} = \frac{X_{1\sigma} + X_0}{R_1 + R_0}.$$

Curentul i''_{10} are o semnificație fizică bine determinată și anume este curentul statoric în cazul în care rotorul se rotește cu viteza de sincronism ($s = 0$).

Urmînd un calcul similar pentru ecuația:

$$(U_1)_i = [c(\mathbf{Z}_1)_{ij} + c^2(\mathbf{Z}'_2)_{ij}](I'_2)_j \equiv (\mathbf{Z}_{12})_{ij}\,(I''_2)_j \tag{32}$$

se obține:

$$\begin{cases} U_1 = \left(cR_1 + \dfrac{c^2R'_2}{s}\right)(I''_2)_1 + (cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma})(I''_2)_2, \\ 0 = -(cX_{1\sigma} + c^2X_{2\sigma})(I''_2)_1 + \left(cR_1 + \dfrac{c^2R'_2}{s}\right)(I''_2)_2, \end{cases} \tag{33}$$

cu :

$$(Z_{12})_{11} = cR_1 + \frac{c^2R'_2}{s}, \quad (Z_{12})_{12} = cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma},$$

$$(Z_{12})_{21} = -cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma}, \quad (Z_{12})_{22} = cR_1 + \frac{c^2R'_2}{s}.$$

Din ecuațiile (33) se determină :

$$(34) \qquad (I''_2)_1 = U_1 \frac{cR_1 + \frac{c^2R'_2}{s}}{\left(cR_1 + \frac{c^2R'_2}{s}\right)^2 + (cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma})^2},$$

$$(35) \qquad (I''_2)_2 = U_1 \frac{cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma}}{\left(cR_1 + \frac{c^2R'_2}{s}\right)^2 + (cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma})^2}.$$

Reprezentarea geometrică a ecuației (33) este redată în fig. 2, unde φ''_2 reprezintă defazajul dintre tensiunea u_1 și curentul i''_2.

La variația alunecării locul geometric al curentului $(I''_2)_j$ se obține eliminînd alunecarea între ecuațiile (33) :

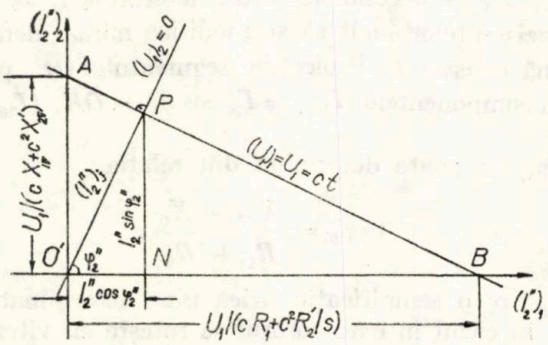


Fig. 2

$$(36) \qquad (I''_2)_1^2 + (I''_2)_2^2 - \frac{U_1}{cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma}} (I''_2)_2 = 0.$$

Expresia (36) reprezintă ecuația unui cerc care are coordonatele centrului (fig. 3) :

$$(37) \qquad M\left(0, \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma}}\right)$$

și a cărui diametru, D, este:

$$D = \frac{U_1}{cX_{1\sigma} + c^2X'_{2\sigma}}. \tag{38}$$

S-au trasat segmentele $\overline{OP'_0} = (I'_{10})_j$, $\overline{P'_0P} = (I''_2)_j$, $\overline{OP} = (I_1)_j$, $\overline{OP_1} = (I_{1k})_j$ (curentul pentru $s = 1$).

Ținînd cont de ecuația (23) se poate determina curba de variație a valorii efective și a defazajului curentului i_1 la variația alunecării (fig. 3).

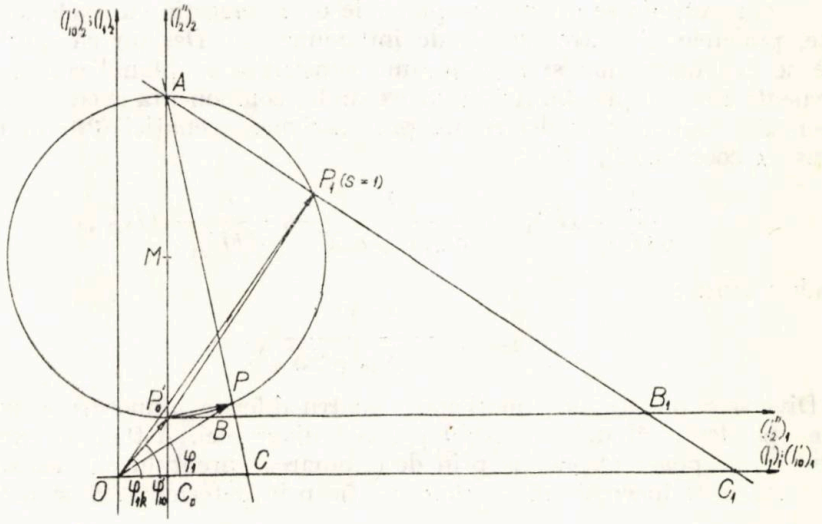


Fig. 3

Se impun aici cîteva observații. Diagrama cercului astfel trasată este o diagramă aproximativă nu datorită unor deficiențe ale metodei propuse ci a fost trasată în acest mod pentru a evidenția principalele caracteristici calitative în raport cu metoda complexă. Astfel s-a presupus că constanta c din (24) are o valoare independentă de componentele impedanțelor $(\mathbf{Z}_1)_{ij}$ și $(\mathbf{Z}_0)_{ij}$. De asemenea s-au introdus și alte ipoteze simplificatoare, uzuale de altfel și în cazul trasării diagramei cercului în planul complex și anume:

a) Se consideră că rezistențele nu variază cu temperatura și nu se ia în considerație efectul pelicular.

b) Se neglijează variația cu sarcina (și deci cu viteza) a t. e. m. u_{e1} și a reactanței de magnetizare.

c) Se neglijează variația reactanțelor de dispersie cu sarcina mașinii care ar provoca saturarea dinților.

d) Se consideră că pierderile suplimentare nu variază cu sarcina.

e) Se neglijează armonicele superioare din curba repartiției spațiale a cîmpului magnetic.

Diagrama cercului la mașina asincronă se trasează în mod uzual prin metoda Bloch [4]. Sînt desigur necesare cîteva comparații cu această metodă.

Este normal ca variația valorii efective și a fazei curentului primar la mașina asincronă, în funcție de variația alunecării, să se studieze într-un sistem de axe în care cel puțin una să reprezinte curentul. În metoda propusă cele două axe reprezintă componente ale holorului curent primar. În acest mod curba de variație a curentului poate fi studiată analitic relativ simplu putîndu-se determina punctele de intersecție cu axele de coordonate, punctele de extremum și de inflexiune etc. Desigur că aceste elemente se pot determina și în diagrama construită în planul complex dar prin calcule mai complicate. Astfel, de exemplu, componenta activă maximă a curentului secundar se determină prin derivarea ecuației (36) în raport cu această coordonată, $(I_2'')_1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(I_2'')_1}(I_2'')_1^2 = \frac{U_1}{cX_{1\sigma} + c^2X_{2\sigma}'} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(I_2'')_1}(I_2'')_1 ,$$

de unde rezultă:

$$(I_2'')_{1\max} = \frac{U_1}{2(cX_{1\sigma} + c^2X_{2\sigma})} .$$

Diversele puncte de funcționare pentru diferite alunecări se pot determina pe două căi mărind astfel precizia diagramei. Astfel, de exemplu, punctul P_1 se poate obține fie prin determinarea curentului și defazajului, cu ajutorul unei încercări în scurtcircuit, fie prin determinarea segmentului

$$\overline{OB}_1 = \frac{U_1}{cR_1 + c^2R_2'} .$$

De asemenea pe segmentul $\overline{C_0C_1}$ (sau $\overline{P_0'B_1}$) se poate grada alunecarea care se poate citi direct unind punctul A cu punctul de funcționare de pe cerc și prelungind dreapta pînă la intersecția cu $\overline{C_0C_1}$ (respectiv $\overline{P_0'B_1}$).

De pe diagrama reprezentată în fig. 3 se pot determina, de asemenea, puterile și cuplurile mașinii asincrone, dar această problemă este contrarie spiritului metodei și este incorectă din punct de vedere matematic. Pentru reprezentarea puterii este necesar un spațiu cu trei dimensiuni.

3. Încercări și rezultate experimentale

S-au determinat și s-au trasat diagramele cercului, prin metoda Bloch, pentru trei mașini asincrone. S-au determinat de pe aceste diagrame curenții și factorii de putere corespunzători alunecărilor nominale și apoi alunecările

corespunzătoare curenților și factorilor de putere nominali. Datele rezultate sînt sintetizate în tabelul 1 în care au fost trecute și celeobținute din diagramele trasate pentru aceleași mașini prin metoda propusă. Din tabelul 1 se evidențiază o concordanță satisfăcătoare între teoria expusă și rezultatele experimentale, dacă se aleg drept criteriu de comparație datele obținute prin trasarea diagramelor cercului prin metoda B l o c h.

Tabelul 1

Date nominale	Mașina *1*	Mașina *2*	Mașina *3*
P [kW]	4	4	5,5
U_1 [V]	220	220	220
I_1 [A]	8,1	8,64	11,5
n [rot/min]	1 440	1 430	1 440
cos φ_1	0,87	0,84	0,85
f_1 [Hz]	50	50	50
Datele necesare pentru trasarea diagramei cercului			
I'_{10} [A]	2,9	4	4,75
φ_{10}[°]	83°	83°50′	82°40′
I_{1k} [A]	29,3	27,8	46,5
φ_{1k} [°]	66°20′	66°	70°50′
P_{10} [W]	230	280	390
P_{1k} [W]	620	695	470
$R_1 + R'_2$ [Ω]	3,14	3,10	1,57
Rezultatele experimentale extrase de pe diagramele cercului trasate prin metoda B l o c h/metoda propusă			
Pentru : s s-au determinat	0,040/0,040	0,046/0,046	0,040/0,040
I_1	8,15/8,17	8,70/8,70	11,60/11,65
cos φ_1	0,870/0,880	0,850/0,840	0,855/0,860
Pentru : I_1	8,1/8,1	8,64/8,64	11,5/11,5
cos φ_1	0,870/0,870	0,840/0,840	0,850/0,850
s-a deteminat s	0,036/0,038	0,043/0,044	0,036/0,037

Primită la 17 februarie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică generală
și mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Moon P., Eberle Spencer D., *A New Mathematical Representation of Alternating Currents*. Tensor 14 (1963).
2. Fransua Al., *Curs de maşini şi instalaţii electrice*. EDP, Buc., 1962.
3. Gheorghiu I. S., *Maşini electrice, probleme şi aplicaţii industriale*. Vol. I, Ed. Tehn., Buc., 1966.
4. Richter R., *Maşini electrice*, (trad. din l. germ.). Vol. I ... IV, Ed. Tehn., Buc., 1958, 1959, 1960.
5. Timotin Al. ş. a., *Lecţii de bazele electrotehnicii*. EDP, Buc., 1964.

ABOUT OF THE OPERATION DIAGRAMS OF THE ELECTRICAL INDUCTION MACHINES

(Summary)

The paper describes the useful of a new mathematical representation of the alternating currents induction machines.

The currents diagrams and the circle diagram of the three-phase induction machines were determined.

It was shown that the geometric locus of the currents in induction machines obtained with the proposed method, is represented in orthogonal coordinates and in real quantities in opposite to the Bloch method of drawing of these geometric locus in complex quantities.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI

D.K. 621.3.016.35

EIN VERFAHREN ZUR STABILITÄTSPRÜFUNG PERIODISCH ZEITVARIANTER LINEARER SYSTEME *)

VON

ROLF UNBEHAUEN

1. Einleitung

In verschiedenen Gebieten der Technik, namentlich in der Regelungstechnik und Nachrichtentechnik verwendet man lineare zeitvariante Systeme als mathematische Modelle zur Beschreibung bestimmter Schaltungen und anderer Objekte. Als Beispiele hierfür seien Regelkreise mit zeitvarianten Parametern, parametrische Verstärker, Frequenzumsetzer und Netzwerke mit Schaltern genannt. In der Regel ist es möglich, die Eingangssignale $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_m(t)$ mit den Ausgangssignalen $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_n(t)$ durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten zu verknüpfen. Eine solche Verknüpfung erhält man bei elektrischen Netzwerken aufgrund der Strom—Spannungsbeziehungen für die Netzwerkelemente und der zwei Kirchhoffschen Gesetze. Die genannten Differentialgleichungen lauten in der Zustandsraum—Darstellung (z. B. [5])

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{x}(t), \tag{1 a}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{x}(t). \tag{1 b}$$

Die Komponenten der Vektoren $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ sind die Eingangssignale $x_\mu(t)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$), bzw. die Ausgangssignale $y_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Der Vektor $\mathbf{z}(t)$ ist der sogenannte Zustandsvektor mit den q Komponentenfunktionen $z_k(t)$, ($k = 1, 2, \ldots, q$). Bei elektrischen Netzwerken kann man die $z_k(t)$ als elektrische Ladungen von Kapazitäten bzw. magnetische Flüsse von Induktivitäten wählen.

*) Vortrag, der im Rahmen der Fakultät für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Jassy am 26. September 1973 veröffentlicht wurde.

Im weiteren sollen nur noch periodisch zeitvariante Systeme betrachtet werden. Diese Einschränkung bedeutet, daß in den Gln. (1 a, b) die q-reihige quadratische Matrix $\mathbf{A}(t)$, die $(q \times m)$-reihige Matrix $\mathbf{B}(t)$, die $(n \times q)$-reihige Matrix $\mathbf{C}(t)$ und die $(n \times m)$-reihige Matrix $\mathbf{D}(t)$ periodische Funktionen mit der Grundperiode T sind. Diese Matrizen können daher in Fourierreihen mit der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ entwickelt werden. Man erhält so insbesondere für $\mathbf{A}(t)$ die Darstellung

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_\mu e^{j\mu\omega_0 t} \tag{2 a}$$

mit den konstanten Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{bmatrix} a_{11}^{(\mu)} & a_{12}^{(\mu)} & \dots & a_{1q}^{(\mu)} \\ a_{21}^{(\mu)} & a_{22}^{(\mu)} & \dots & a_{2q}^{(\mu)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}^{(\mu)} & a_{q2}^{(\mu)} & \dots & a_{qq}^{(\mu)} \end{bmatrix}. \tag{2 b}$$

2. Stabilität

Bei der Untersuchung der absoluten Stabilität von Systemen der hier betrachteten Art genügt es, das betreffende System im erregungsfreien Zustand, d. h. für $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ zu analysieren [5]. Die Aufgabe besteht dann darin festzustellen, ob der durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{z}(t), \tag{3}$$

mit $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ gegebene Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ für $t \to \infty$ gegen Null strebt, und zwar bei willkürlicher Wahl des Anfangszustandes $\mathbf{z}_0$ und des Anfangszeitpunktes t_0. Generell wird angenommen, daß der Zustandsvektor in jedem endlichen Zeitpunkt endliche Komponentenwerte aufweist.

Man kann die Lösung der Gl. (3) mit Hilfe der Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ des Systems in der Form

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{z}_0$$

ausdrücken (z. B. [5]). Angesichts der Tatsache, daß das System periodisch zeitvariant ist und die Grundperiode T hat, läßt sich die Übergangsmatrix in der Form

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{P}(t, t_0)\mathbf{K}^{(t-t_0)/T} \tag{4}$$

schreiben [5]. Dabei ist $\mathbf{P}(t, t_0)$ eine in beiden Variablen t und t_0 mit der Periode T periodische Matrix, und $\mathbf{K}$ bedeutet eine nichtsinguläre konstante Matrix, die sich durch

(5) $$\mathbf{K} = \Phi(t_0 + T,\ t_0)$$

darstellen und berechnen läßt. Deshalb strebt die Übergangsmatrix aufgrund der Gl. (4) für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Folge der Potenzen $\mathbf{K}^n$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Da dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Eigenwerte der Matrix **K** dem Betrage nach kleiner als Eins sind, kann man die Stabilität eines periodisch zeitvarianten linearen Systems in folgender Weise prüfen:

Man berechnet gemäß Gl. (5) für irgendein t_0 die Matrix **K** durch numerische Integration von Gl. (3) [5]. Sodann is festzustellen, ob alle Eigenwerte von **K** dem Betrage nach kleiner als Eins sind [1].

Es muß hier noch auf folgendes hingewiesen werden. Da

$$\Phi(t,\ t_1) = \Phi(t,\ t_0) \cdot \Phi(t_0,\ t_1)$$

gilt [5], strebt $\Phi(t,\ t_1)$ für $t \to \infty$ und beliebiges t_1 sicher dann gegen Null, wenn $\Phi(t,\ t_0)$ für $t \to \infty$ und festes t_0 verschwindet. Es braucht also die Stabilitätsprüfung nur mit einem **K** Gl. (5) bei willkürlicher Wahl von t_0 durchgeführt zu werden. In der Arbeit [4] wurde die Stabilitätsprüfung für $t_0 = 0$ durchgeführt.

In den folgenden Abschnitten wird eine weitere Möglichkeit entwickelt, die Stabilität periodisch zeitvarianter linearer Systeme zu prüfen. Dabei werden die Eigenschwingungen untersucht. Die praktische Durchführung der Stabilitätsprüfung erfordert neben der Rechenarbeit, die auch bei der Stabilitätsanalyse zeitinvarianter linearer Systeme anfällt, die numerische Berechnung von Determinanten. Allerdings haben diese Determinanten unendliche Ordnung; ihre Werte müssen durch Determinanten endlicher Ordnung approximiert werden, welche Ausschnitte jener unendlichen Determinanten sind. Alle im folgenden auftretenden unendlichen Reihen, Matrizen und Determinanten werden als konvergent vorausgesetzt. Eine diesbezügliche mathematische Untermauerung der Theorie scheint nicht einfach zu sein.

3. Die Eigenschwingungen

Zur Lösung der Vektordifferentialgleichung (3) mit gemäß den Gln. 2 a, b) periodischer Matrix $\mathbf{A}(t)$ wird der Ansatz

(6 a) $$\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{pt} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\omega_0 t}$$

mit

(6 b) $$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{\nu 1} \\ K_{\nu 2} \\ \vdots \\ K_{\nu q} \end{bmatrix}$$

gewählt. Damit erhält man

$$\frac{dz(t)}{dt} = e^{pt} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (p + j\nu\omega_0)\,\mathbf{K}_\nu\, e^{j\nu\omega_0 t}. \tag{7}$$

Führt man die Gln. (6 a, b) und (7) in die Gl. (3) unter der Berücksichtigung von Gl. (2 a) ein, so ergibt sich nach Division mit e^{pt} die Beziehung

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (p + j\nu\omega_0)\,\mathbf{K}_\nu\, e^{j\nu\omega_0 t} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_\mu\, \mathbf{K}_\nu\, e^{j\omega_0 t(\mu+\nu)}.$$

Da diese Relation identisch in der Variablen t erfüllt sein muß, folgt hieraus durch Koeffizientenvergleich

$$(p + j\nu\omega_0)\mathbf{K}_\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{\nu-k}\mathbf{K}_k.$$

Hiermit ist ein lineares homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Vektoren $\mathbf{K}_\nu$ (Gl. (6 b)) ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), gefunden. Es läßt sich als Matrizengleichung schreiben:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = 0. \tag{8}$$

Dabei bedeuten

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{K}_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{9 a}$$

und

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \mathbf{A}_{02} & \mathbf{A}_1 & & & \\ \ddots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{01} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \\ & \cdots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \cdots \\ & & \cdots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_1 \cdots \\ & & \cdots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{0,-2} & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \tag{9 b}$$

mit

$\mathbf{A}_{0\nu} = \mathbf{A}_0 - (p + j\nu\omega_0)\mathbf{E}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\mathbf{E}$ Einheitsmatrix).

Nichttriviale Lösungen $\mathbf{K}$ der Gl. (8) sind dann und nur dann zu erwarten, wenn die Determinante der Matrix $\mathbf{M}$ (Gl. (9 b)) verschwindet. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, führt die Forderung

(10) $$\det \mathbf{M} = 0$$

auf eine Polynomgleichung q-ten Grades in der Veränderlichen $z = \exp(2\pi p/\omega_0)$, aus der die Lösungen

$$p_{ik} = p_i + \mathrm{j}k\omega_0 \qquad (i = 1, 2, ..., q\,;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

in der Variablen p folgen. Führt man diese Lösungen in die Gl. (6 a) ein, so erhält man für jeden Eigenwert p_i eine wesentliche Eigenschwingung

(11) $$\mathbf{z}_i(t) = \mathrm{e}^{p_i t} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_\nu^{(i)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\omega_0 t} \qquad (i = 1, 2, ..., q).$$

Für die Vektoren $\mathbf{K}_\nu^{(i)}$ ist die Gl. (8) gültig. Sind alle p_i voneinander verschieden, dann bilden die q Eigenschwingungen $\mathbf{z}_i(t)$ ein System linear unabhängiger Funktionen, und jede Lösung der Gl. (3), namentlich die Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ läßt sich durch Superposition von Funktionen Gl. (11) darstellen. Bei mehrfachen Eigenwerten benötigt man hierfür noch zusätzliche Eigenschwingungen. Ist z. B. $p_1 = p_2$ ein doppelter Eigenwert, so hat man neben $\mathbf{z}_1(t) \equiv \mathbf{z}_2(t)$ noch die Eigenlösung

$$\bar{\mathbf{z}}_1(t) = t\mathrm{e}^{p_1 t} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{K}}_\nu^{(1)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\omega_0 t}$$

zu nehmen.

Aus vorstehenden Betrachtungen ist nun unmittelbar zu erkennen, daß das System genau dann stabil ist, wenn alle Funktionen $\mathbf{z}_i(t)$ (Gl. (11)) $(i = 1, 2, ..., q)$ für $t \to \infty$ verschwinden, d. h. für die Eigenwerte

(12) $$\mathrm{Re}\, p_i < 0 \qquad (i = 1, 2, ..., q)$$

gilt. Ist $p_1 = \sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1$ ein Eigenwert mit $\omega_1 \neq 0$, so erfüllt außer $\mathbf{z}_1(t)$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\mathbf{z}_1^*(t)$ die Gl. (3), d. h. $\mathbf{z}_1^*(t)$ ist eine Eigenschwingung. Dies bedeutet, daß neben p_1 auch p_1^* ein Eigenwert sein muß. Die Eigenwerte p_i $(i = 1, 2, ..., q)$ müssen daher, soweit sie nicht reell sind, paarweise konjugiert komplex auftreten.

4. Die charakteristische Gleichung

Mit Hilfe der q-reihigen Diagonalmatrizen

$$\mathbf{H}_\nu = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} - (p + \mathrm{j}\nu\omega_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(0)} - (p + \mathrm{j}\nu\omega_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{qq}^{(0)} - (p + \mathrm{j}\nu\omega_0) \end{bmatrix}$$

$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

wird die unendliche Diagonalmatrix

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{H}_2 & & & & & \\ & & \mathbf{H}_1 & & & & \\ & & & \mathbf{H}_0 & & & \\ & & & & \mathbf{H}_{-1} & & \\ & \mathbf{0} & & & & \mathbf{H}_{-2} & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

gebildet. Unter Verwendung von **H** kann nun mit Hilfe von **M** die Matrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{M},$$

d. h.

$$(13)\quad \mathbf{N}=\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ & \mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{A}_{02} & \mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{A}_1 & \cdots & & & \\ \ddots & & & & & & \\ & \mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{A}_{-1} & \mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{A}_{01} & \cdots & \mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{A}_1 & \mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{A}_2 & \cdots \\ & \cdots & \mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{A}_{-1} & \cdots & \mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{A}_{00} & \mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{A}_1 & \mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{A}_2\cdots \\ & & \cdots & & \mathbf{H}_{-1}^{-1}\mathbf{A}_{-1} & \mathbf{H}_{-1}^{-1}\mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{H}_{-1}^{-1}\mathbf{A}_1\cdots \\ & & & & \cdots & \mathbf{H}_{-2}^{-1}\mathbf{A}_{-1} & \mathbf{H}_{-2}^{-1}\mathbf{A}_{0,-2} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

eingeführt werden. Damit ist die Forderung gemäß Gl. (10) sicher dann erfüllt, wenn die Gleichung

$$(14)\qquad \det \mathbf{N} = 0$$

für $p \neq a_{\mu\mu}^{(0)} + \mathrm{j}\nu\omega_0$ ($\mu = 1, 2, \ldots, q$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) befriedigt wird. Man beachte, daß alle hier auftretenden unendlichen Matrizen in der Variablen p periodisch sind. Es gilt insbesondere

$$\mathbf{N}(p + \mathrm{j}k\omega_0) = \mathbf{N}(p)$$

für beliebiges ganzzahliges k.

Von der Matrix **N**(Gl. (13)) soll nun ein endlicher Ausschnitt betrachtet werden:

$$\mathbf{N}_r=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_r^{(0)} & \mathbf{N}_r^{(1)} & \mathbf{N}_r^{(2)} \cdots & & & & \mathbf{N}_r^{(2r)} \\ \mathbf{N}_{r-1}^{(-1)} & \mathbf{N}_{r-1}^{(0)} & \mathbf{N}_{r-1}^{(1)} & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{N}_1^{(0)} & & & \\ & & & \mathbf{N}_0^{(0)} & \mathbf{N}_0^{(1)} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{N}_{-1}^{(0)} & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{N}_{-(r-1)}^{(1)} \\ \mathbf{N}_{-r}^{(-2r)} & & & & & \cdots & \mathbf{N}_{-r}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Dabei bedeutet

$$\mathbf{N}_{\nu}^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{H}_{\nu}^{-1}\,\mathbf{A}_{0\nu}\,, & (k = 0), \\ \mathbf{H}_{\nu}^{-1}\,\mathbf{A}_{k}\,, & (k \neq 0) \end{cases} \quad (\nu = 0,\ \pm 1\,,\ldots,\ \pm r).$$

Es ist also

$$\det \mathbf{N} = \lim_{r\to\infty} \det \mathbf{N}_r.$$

Die Determinante $\det \mathbf{N}_r$ ist eine rationale Funktion in p. Ihre Pole sind die $q(2r + 1)$ Punkte

$$p_{\infty\mu} = a_{\mu\mu}^{(0)} + \mathrm{j}\nu\omega_0 \quad (\mu = 1,\ 2\,,\ldots,\ q\,;\ \nu = 0,\ \pm 1\,,\ldots,\ \pm r).$$

Sie sind einfach, falls man voraussetzt, daß alle $a_{\mu\mu}^{(0)}$ voneinander verschieden sind. Diese Voraussetzung soll gemacht werden. Für $p \to \infty$ ist $\det \mathbf{N}_r$ gleich Eins. Damit kann man $\det \mathbf{N}_r$ durch die Partialbruchentwicklung

$$\det \mathbf{N}_r = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=-r}^{r} \frac{D_{\mu\nu}}{p - a_{\mu\mu}^{(0)} - \mathrm{j}\nu\omega_0}$$

ausdrücken. Da $\det \mathbf{N}_r$ für $r \to \infty$ in der Variable p periodisch mit der Periode ω_0 wird, kann bei hinreichend großem r erreicht werden, daß

$$\det \mathbf{N}_r = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} \widetilde{D}_{\mu} \sum_{\nu=-r}^{r} \frac{1}{p - a_{\mu\mu}^{(0)} - \mathrm{j}\nu\omega_0} + R_r(p) \tag{15}$$

gilt, wobei $|R_r(p)|$ im Bereich $|p| \leqq R$, (R beliebig, aber fest), unter Ausschluß der „unmittelbaren Umgebungen" der Polstellen $p_{\infty\mu}$ beliebig klein wird. Man kann jetzt in Gl. (15) die Summationsgrenzen $\pm r$ durch $\pm \infty$ ersetzen, wobei aus Gründen der Konvergenz die Summation in der Reihenfolge $\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\,,\ldots$ der Summanden auszuführen ist. Auf diese Weise erhält man

$$\det \mathbf{N}_r = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\widetilde{D}_{\mu}}{\omega_0} \left[\frac{1}{\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0} - \mathrm{j}\nu} + \frac{1}{\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0} + \mathrm{j}\nu} \right) \right] + R(p). \tag{16 a}$$

Durch genügend große Wahl von r wird $|R(p)|$ im oben genannten Bereich beliebig klein. Für $r \to \infty$ ergibt sich daher

$$\det \mathbf{N} = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\widetilde{D}_{\mu}}{\omega_0} \left[\frac{1}{\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0}} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0}}{\left(\dfrac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0} \right)^2 + \nu^2} \right]. \tag{16 b}$$

Unter Beachtung der Partialbruchentwicklung der coth-Funktion [3] wird mit der Abkürzung

$$D_\mu = \frac{\tilde{D}_\mu \pi}{\omega_0} \tag{17}$$

schließlich

$$\det \mathbf{N} = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} D_\mu \coth\left(\pi \frac{p - a_{\mu\mu}^{(0)}}{\omega_0}\right). \tag{18}$$

In dieser Gleichung wird die bekannte Darstellung der coth - Funktion in Form von e - Funktionen eingeführt. Dies liefert

$$\det \mathbf{N} = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} D_\mu \frac{\exp\left[\frac{2\pi}{\omega_0}(p - a_{\mu\mu}^{(0)})\right] + 1}{\exp\left[\frac{2\pi}{\omega_0}(p - a_{\mu\mu}^{(0)})\right] - 1}$$

und mit den Abkürzungen

$$\exp\left(\frac{2\pi}{\omega_0} p\right) = z, \tag{19 a}$$

$$\exp\left(\frac{2\pi}{\omega_0} a_{\mu\mu}^{(0)}\right) = z_{0\mu} \tag{19 b}$$

zunächst

$$\det \mathbf{N} = 1 + \sum_{\mu=1}^{q} D_\mu \frac{z + z_{0\mu}}{z - z_{0\mu}}, \tag{20 a}$$

oder nach Zusammenfassung der Summanden

$$\det \mathrm{N} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_q z^q}{(z - z_{01})(z - z_{02}) \ldots (z - z_{0q})}. \tag{20 b}$$

Auf diese Weise läßt sich die Determinante der Matrix **N** als rationale Funktion q-ten Grades in z mit dem Zählerpolynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_q z^q$$

ausdrücken. Der Gl. (13) entspricht daher die charakteristische Polynomgleichung

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_q z^q = 0. \tag{21}$$

Ihre Lösungen seien mit ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ bezeichnet. Gemäß Gl. (19 a) entsprechen den ζ_i die Eigenwerte

$$p_i = \frac{\omega_0}{2\pi} \ln \zeta_i = \frac{\omega_0}{2\pi} (\ln |\zeta_i| + \mathrm{j} \arg \zeta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \tag{22}$$

Sie sind, wie ursprünglich gefordert, von den Werten $a_{\mu\mu}^{(0)} + j\nu\omega_0$ verschieden, da diese in der z-Ebene den Punkten $z_{0\mu}$, d. h. den Polen von det **N** Gl. (20 b) entsprechen.

Aufgrund der Gl. (22) läßt sich nun die Stabilitätsbedingung (12) in der Form

$$\ln|\zeta_i| < 0$$

oder

$$|\zeta_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, ..., q)$$

formulieren.

Absolute Stabilität des betrachteten Systems ist also genau dann gegeben, wenn alle Lösungen der charakteristischen Polynomgleichung (21) im offenen Einheitskreis $|z| < 1$ liegen. Zur Prüfung dieser Bedingung braucht man die Lösungen ζ_i der Gl. (21) nicht explizit zu berechnen. Man kann diese Prüfung mit Hilfe endlich vieler arithmetischer Operationen bei Kenntnis der Polynomkoeffizienten a_μ durchführen [1]. An früherer Stelle wurde gezeigt, daß die Eigenwerte p_i mit von Null verschiedenen Imaginärteilen paarweise konjugiert komplex auftreten. Angesichts der Gl. (22) muß dies auch bei den ζ_i der Fall sein. Aus diesem Grund müssen die Koeffizienten a_μ in Gl. (21) und D_μ in Gl. (18) bzw. $\widetilde{D}_\mu$ in Gl. (16 b) reell sein.

Zur praktischen Stabilitätsprüfung sind die Koeffizienten D_μ (Gl. (17)) zu berechnen. Mit Hilfe der Gl. (16 b) ergibt sich

$$D_\mu = \frac{\pi}{\omega_0} \lim_{p \to a_{\mu\mu}^{(0)}} [(p - a_{\mu\mu}^{(0)}) \det \mathbf{N}] \qquad (\mu = 1, 2, ..., q).$$

Bei der numerischen Auswertung dieser Formel ersetzt man **N** durch einen endlichen Ausschnitt $\mathbf{N}_r$ mit hinreichend großem r. Auf diese Weise erhält man näherungsweise

$$D_\mu = \frac{\pi}{\omega_0} \det Q_r(a_{\mu\mu}^{(0)}). \tag{23}$$

Dabei bedeutet $Q_r(p)$ eine $q(2r + 1)$-reihige quadratische Matrix, die mit den Diagonalmatrizen

$$\mathbf{F}_\mu = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & p - a_{\mu\mu}^{(0)} & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

($\mathbf{F}_\mu$ hat auf der Diagonale an μ-ter Stelle das Element $p - a_{\mu\mu}^{(0)}$, sonst ausschließlich Einsen) und

$$(24)\qquad \mathbf{G}_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}^{(0)} - p} & & & & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{a_{22}^{(0)} - p} & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{a_{\mu-1,\mu-1}^{(0)} - p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \frac{1}{a_{\mu+1,\mu+1}^{(0)} - p} & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{a_{qq}^{(0)} - p} \end{bmatrix}$$

folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{E} & & \\ & & & \mathbf{F}_\mu & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{E} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{N}_r$$

($\mathbf{E}$ bedeuten q-reihige Einheitsmatrizen, $\mathbf{F}_\mu$ ist der $(r+1)$-te Block auf der Hauptdiagonale) oder

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{E} & & \\ & & & \mathbf{F}_\mu & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{E} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r^{-1} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{H}_0^{-1} & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \\ & & & \mathbf{H}_{-r}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{M}_r,$$

also

$$(25)\qquad \mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r^{-1} & & & & \\ & \mathbf{H}_{r-1}^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{H}_1^{-1} & \\ & & & & \mathbf{G}_\mu \\ & & & & \mathbf{H}_{-1}^{-1} \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{H}_{-r}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{M}_r$$

($\mathbf{M}_r$ ist ein $\mathbf{N}_r$ entsprechender Ausschnitt der Matrix $\mathbf{M}$(Gl. (9 b)). Die Koeffizienten D_μ lassen sich unter Verwendung der Gln. (23), (24) und (25) berechnen.

5. Der Fall harmonischer Zustandsmatrix

Ein interessanter und oft auftretender Fall ist der, daß in der Reihendarstellung der Zustandsmatrix $\mathbf{A}(t)$ außer für $\mu = -1$, $\mu = 0$ und $\mu = 1$ alle Summanden identisch verschwinden. In diesem Fall ist $\mathbf{M}$ (Gl. (9 b)) eine tridiagonale Blockmatrix. Auch die für die Auswertung der Gl. (23) erforderliche Matrix $\mathbf{Q}_r$ (Gl. (25)) ist eine (endliche) tridiagonale Blockmatrix. Diese Eigenschaft wirkt sich bei der Berechnung der Determinante besonders günstig aus. Schreibt man

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_1 & & & & \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{R}_2 & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathbf{S}_{r+1} & \mathbf{R}_{r+1} & \mathbf{T}_{r+1} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \mathbf{T}_{2r} \\ & & & & \mathbf{S}_{2r+1} & \mathbf{R}_{2r+1} \end{bmatrix},$$

so gilt gemäß den Gln. (9 b) und (25)

$$\mathbf{R}_\nu = \mathbf{H}_{r+1-\nu}^{-1}\, \mathbf{A}_{0,r+1-\nu} \quad (\nu \neq r+1),\ \mathbf{R}_{r+1} = \mathbf{G}_\mu\, \mathbf{A}_{00},$$

$$\mathbf{S}_\nu = \mathbf{H}_{r+1-\nu}^{-1}\, \mathbf{A}_{-1} \quad (\nu \neq r+1),\ \mathbf{S}_{r+1} = \mathbf{G}_\mu\, \mathbf{A}_{-1},$$

$$\mathbf{T}_\nu = \mathbf{H}_{r+1-\nu}^{-1}\, \mathbf{A}_{1} \quad (\nu \neq r+1),\ \mathbf{T}_{r+1} = \mathbf{G}_\mu\, \mathbf{A}_{1}.$$

Nun lassen sich Matrizen $\mathbf{L}_\nu$ und $\mathbf{U}_\nu$ rekursiv gemäß

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_1,\quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_1^{-1}\, \mathbf{T}_1,$$

$$\mathbf{L}_\nu = \mathbf{R}_\nu - \mathbf{S}_\nu\, \mathbf{U}_{\nu-1} \quad (\nu = 2,\ 3,\ldots,\ 2r+1),$$

$$\mathbf{U}_\nu = \mathbf{L}_\nu^{-1}\, \mathbf{T}_\nu \quad (\nu = 2,\ 3,\ldots,\ 2r+1)$$

berechnen. Man kann leicht verifizieren, daß die sogenannte LU-Faktorisierung [2]

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & & & \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{L}_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \\ & & \mathbf{S}_{2r+1} & \mathbf{L}_{2r+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{U}_1 & & \\ & \mathbf{E} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{U}_{2r} \\ & & & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

besteht. Damit erhält man

$$\det \mathbf{Q}_r = \prod_{\nu=1}^{2r+1} \det \mathbf{L}_\nu ,$$

d. h. nach Gl. (23)

$$D_\mu = \frac{\pi}{\omega_0} \prod_{\nu=1}^{2r+1} \det \mathbf{L}_\nu (a_{\mu\mu}^{(0)}). \tag{26}$$

Auf diese Weise lassen sich die D_μ bei großen Werten von r offensichtlich relativ schnell berechnen.

6. Ein Beispiel

Als Beispiel wird ein System mit den Zustandsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma}{2} e^{-j\omega_0 t} - \lambda - \frac{\gamma}{2} e^{j\omega_0 t} & -2D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x(t) \end{bmatrix}$$

gewählt. Diese Gleichungen lassen sich in Form der Mathieuschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + 2D \frac{dz_1}{dt} + (\lambda + \gamma \cos \omega_0 t) z_1 = x(t)$$

zusammenfassen. Gemäß den Gln. (2 a, b) erhält man

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & -2D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{0}$ für $|\mu| \geqq 2$. Es liegt hier der Sonderfall von Abschnitt 5 vor. Deshalb lassen sich die zur Stabilitätsprüfung erfoderlichen Determinanten besonders einfach berechnen. Mit Hilfe eines FORTRAN - Programms wurde auf einem Computer CDC 3 300 diese Berechnung für eine Reihe von Parameterwerten durchgeführt. Aufgrund der Gln. (20 a, b) ergab sich dann jeweils die charakteristische Gleichung (21), woraus die Lösungen ζ_1, ζ_2 folgten. So ergab sich für $\lambda = 0{,}4$; $\gamma = 0{,}68$ und $D = 0{,}25$ bei $r = 253$

$$D_1 = -D_2 = 1{,}093303 ;$$
$$\zeta_1 = -1{,}005942 ; \quad \zeta_2 = \quad 0{,}042959.$$

Es handelt sich also um einen Fall in der unmittelbaren Nähe des Stabilitätsrandes. Die Rechenzeit lag in der Größenordnung von weniger als 20 sec.

Eingegangen am 15. Oktober 1973

Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik, Universität Erlangen — Nürnberg, Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Forster U., Unbehauen R., *Zur Stabilitätsprüfung bei diskontinuierlichen oder periodisch zeitvarianten linearen Systemen.* Archiv für Elektrotechnik (im Druck).

2. Isaacson E., Keller H. B., *Analyse numerischer Verfahren.* Harri Deutsch, Zürich, 1973.
3. Knopp K., *Funktionentheorie.* Bd. II, 9. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, 1955.
4. Schiehlen W., Kolbe O., *Ein Verfahren zur Untersuchung von linearen Regelsystemen mit periodischen Parametern.* Regelungstechnik, 15, 451–455 (1967).
5. Unbehauen R., *Systemtheorie. Eine Einführung für Ingenieure.* 2. Aufl., R. Olden bourg Verlag, München, 1971.

METODĂ DE VERIFICARE A STABILITĂŢII SISTEMELOR LINIARE PERIODIC VARIABILE ÎN TIMP

(Rezumat)

Se descrie o metodă numerică care permite verificarea stabilităţii absolute a sistemelor liniare periodic variabile în timp. În acest scop se presupune prin ipoteză că se dispune de descrierea sistemului în spaţiul stărilor. Aplicarea metodei impune studierea poziţiei zerourilor unui polinom caracteristic în raport cu cercul de rază unu. Coeficienţii polinomului se pot calcula cu ajutorul unor determinanţi finiţi, care reprezintă aproximaţii ale anumitor determinanţi infiniţi. Deosebit de convenabil este calculul numeric în cazul unei matrice de sistem armonice. Acest caz este ilustrat de un exemplu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ ELECTRONICĂ AUTOMATIZĂRI

D.C. 621—52 : 519

ON THE REALIZATION OF THE AUTOMATON RELATED TO AN EXTENSION OF A SEMIGROUP

BY

DAN SIMOVICI and CORINA REISCHER

1. Introduction

In the structure theorem of finite automata belonging to K r o h n and R h o d e s there exists the problem of prolonging the simulation of the automaton of the semigroup to the simulation of the automaton of a certain extension of the semigroup [1]...[3].

In this Note we present the solution of this problem in an original manner.

A finite automaton is a 5-tuple $A = [I, S, O, f, g]$, where I, S, O are finite sets representing respectively the alphabet of inputs, the set of states and the alphabet of outputs, $f : S \times I \to S$ is the next-state function, $g : S \times I \to O$ is the output function.

The functions f and g can be extended till $S \times I^*$ by defining inductively on the length of the word $p \in I^*$,

$$f(s, pi) = f(f(s, p), i), \qquad g(s, pi) = g(f(s, p), i).$$

Here I^* is the free semigroup generated by the set I.

An *identity-reset automaton* is an automaton for which

$$I = \{i_0, i_1, ..., i_n\}, \quad S = O = \{s_1, ..., s_n\}, \quad f(s, i_0) = g(s, i_0) = s,$$

$$\forall s \in S,\ f(s, i_j) = g(s, i_j) = s_j,\ \forall j = \overline{1, n},\ \forall s \in S.$$

In the special case $n = 2$ we obtain a flip-flop.

Let now $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $(j = 1, 2)$, be two finite automata, I_0 a finite non-empty alphabet, $\xi : I_0 \times O_1 \to I_2$, $\eta : I_0 \to I_1$. The *cascade*

$A_2 \times_{(\xi, \eta)} A_1$ is the automaton $A_2 \times_{(\xi, \eta)} A_1 = [I_0, S_2 \times S_1, O_2 \times O_1, f_{(\xi, \eta)}, g_{(\xi, \eta)}]$ where $f_{(\xi, \eta)}((s_2, s_1), i_0) = (f_2(s_2, \xi(i_0, g_1(s_1, \eta(i_0))), f_1(s_1, \eta(i_0)))$ and $g_{(\xi, \eta)}((s_2, s_1), i_0) = (g_2(s_2, \xi(i_0, g_1(s_1, \eta(i_0)))), g_1(s_1, \eta(i_0)))$.

The automaton A_2 simulates the automaton A_1 by the triple $\psi = (t, u, y)$, where $t : I_1^* \to I_2^*$, $u : S_1 \to S_2$, $y : O_2 \to O_1$ if the diagram

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & \xrightarrow{g_{1s_1}} & O_1 \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ I_2^* & \xrightarrow[g_{2u(s_1)}]{} & O_2 \end{array}$$

is commutative. We shall denote this $A_1 \mid A_2$.

Here the mapping $g_s : I^* \to 0$ is defined by

$$g_s(p) = g(s, p).$$

2. The Automaton of a Semigroup

Let W be a finite semigroup. The automaton of the semigroup W is $A(W) = [W, W, W, f_W, g_W]$, where $f_W(w_1, w_2) = g_W(w_1, w_2) = w_1 w_2$.

The *extension of the semigroup* W by the elements $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq W$ is the subsemigroup $[W; w_1, \ldots, w_m]$ of the semigroup W^W generated by the mappings:

$$\{f \mid f : W \to W,\ \exists w',\ f(w) = f_{w'}(w) = ww'\} \cup \{f_j \mid f_j : W \to W,\ f_j(w) = w_j,$$

$$\forall w \in W,\ j = \overline{1, m}\}.$$

In the semigroup W^W the product is defined by $(f_1 \circ f_2)(w) = f_2(f_1(w))$. Hence $f_{w_1} \circ f_{w_2} = f_{w_1 w_2}$, and, because $(f_{w_1} \circ f_j)(w) = f_j(f_{w_1}(w)) = f_j(ww_1) = w_j = f_j(w)$, we have $f_{w_1} \circ f_j = f_j$.

Let $A(W)$ and a set of symbols $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$. The extended automaton $A(W; I) = [I \cup W, W, W, \hat{f}, \hat{g}]$ is defined by

$$\hat{f}(w, w_1) = \hat{g}(w, w_1) = \begin{cases} ww_1, & \text{if } w, w_1 \in W, \\ ww_j, & \text{if } w_1 = i_j,\ \forall w \in W. \end{cases}$$

Theorem 1. *We have the simulation* $A(W; I) \mid A([W; w_1, \ldots, w_m])$

Proof. The triple $\psi = (t, u, y)$, where:

$$t(w) = \begin{cases} f_w, & \text{if } w \in W, \\ f_j, & \text{if } w = i_j \in I, \end{cases} \qquad u(w) = f_w,\ \forall w \in W,$$

$$y(f) = \begin{cases} w, & \text{if } f = f_w \\ w_j, & \text{if } f = f_j, \end{cases}$$

mkes commutative the diagram

$$\begin{array}{ccc} W \cup I & \xrightarrow{\hat{g}_w} & W \\ \downarrow t & & \uparrow y \\ [W; w_1, \ldots, w_m] & \xrightarrow[g_{u(w)}]{} & [W; w_1, \ldots, w_m]. \end{array}$$

Indeed, if $w' \in W \cup I$ then

$$y(g_{u(w)}(t(w'))) = \begin{cases} y(g_{u(w)}(f_{w'})), & \text{if } w' \in W \\ y(g_{u(w)}(f_j)), & \text{if } w' = i_j \in I \end{cases} = \begin{cases} y(f_w f_{w'}), & \text{if } w' \in W \\ y(f_w f_j), & \text{if } w' = i_j \in I \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} y(f_{ww'}), & \text{if } w' \in W \\ y(f_j), & \text{if } w' = i_j \in I \end{cases} = \begin{cases} ww', & \text{if } w' \in W \\ w_j, & \text{if } w' = i_j \in I \end{cases} = \hat{g}_w(w').$$

Let W^1 the monoid related to the semigroup W, which is defined by

$$W^1 = \begin{cases} W, & \text{if there exists an unit } e_W \text{ in } W \\ W \cup \{e_W\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here $we_W = e_W w = w$.

Theorem 2. *There exists the simulation*: $A(W; I \cup \{e_W\}) | A([W^1; w_1, \ldots, w_m])$.

Proof. The automaton $A(W; I \cup \{e_W\}) = [I \cup \{e_W\} \cup W, W, W, \hat{f}, \hat{g}]$ where:

$$\hat{f}(w, w_1) = \hat{g}(w, w_1) = \begin{cases} ww_1, & \text{if } w, w_1 \in W, \\ w_j, & \text{if } w_1 = i_j, \forall w \in W, \\ w, & \text{if } w_1 = e_W, \forall w \in W, \end{cases}$$

is simulated by the automaton $A([W^1; w_1, \ldots, w_m])$ by the triple $\psi = (t, u, v)$ which makes commutative the diagram

$$\begin{array}{ccc} W \cup I \cup \{e_W\} & \xrightarrow{\hat{g}_w} & W \\ \downarrow t & & \uparrow y \\ [W^1; w_1, \ldots, w_m] & \xrightarrow[g_{u(w)}]{} & [W^1; w_1, \ldots, w_m] \end{array}$$

Here $t(w) = \begin{cases} f_w, \text{ if } w \in W, \\ f_j, \text{ if } w = i_j \in I, \\ 1_W, \text{ if } w = e_W, \end{cases}$ $u(w) = f_w$ and $y(f) = \begin{cases} w, \text{ if } f = f_w, \\ w_j, \text{ if } f = f_j, \\ e_W, \text{ if } f = 1_W. \end{cases}$

3. Simulation of the Automaton of the Extended Semigroup

The main result of this paper is contained in:

T h e o r e m 3. *If the automaton $A(W)$ is simulated by a cascade formed by automata related to groups and flip-flops then the automaton $A([W^1; w_1, ..., w_m])$ of the extended semigroup can be simulated by a cascade composed by additional flip-flops and the same automata as in the first cascade* $m = |W|$.

P r o o f. Let us suppose that the automaton $A(W)$ is simulated by the cascade from Fig. 1 composed by the automata $A_j = [I_j, S_j, S_j, f^j, g^j]$, $j = \overline{1, n}$, which are either automata related to groups of flip-flops. In the first case $I_j = S_j$ and in the second one $I_j = \{i_0, i_1, i_2\}$.

Let $\psi = (1_W, u, y)$ this simulation.

Taking into account that the extended automaton $A'_j = A(S_j; \{i^j_1, ..., ..., i^j_{|S_j|}\})$ is a permutation — reset automaton this automaton can be si-

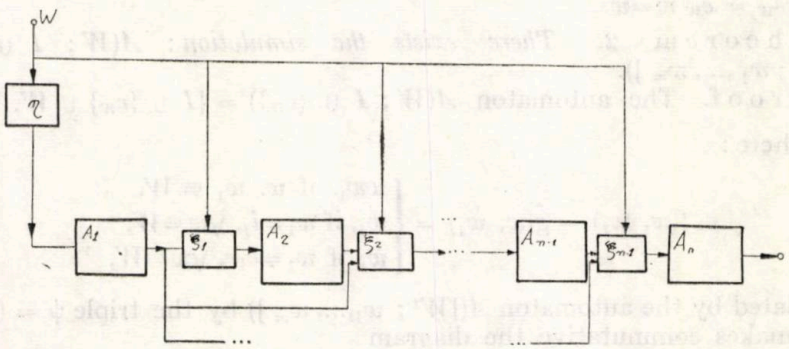


Fig. 1

mulated [2] by a cascade A''_j composed by the automaton A_j and several flip-flops. Namely there are necessary $\log_2 |S_j| + 1$ additional flip-flops.

Let $\psi_j = (1_{I_j}, u_j, y_j)$ this simulation, which makes commutative the diagram

$$\begin{array}{ccc} S_j \cup X_j & \xrightarrow{g'_{js}} & S_j \\ \downarrow 1_{S_j \cup X_j} & & \uparrow y_j \\ S''_j & \xrightarrow[g''_{ju_j(s)}]{} & S'_j \end{array}$$

Here S''_j is the set of states of the cascade A''_j and $X_j = \{i^j_1, ..., i^j_{|S_j|}\}$ is the set of resets of the automaton A'_j.

We shall consider the cascade from Fig. 2 composed by the automata $\{A''_j\}$, the flip-flops B, B' and the flip-flops which exist in the cascade from Fig. 1, which are denoted here by $\{A''_k\}$. The order of connection of these automata is the same as in Fig. 1.

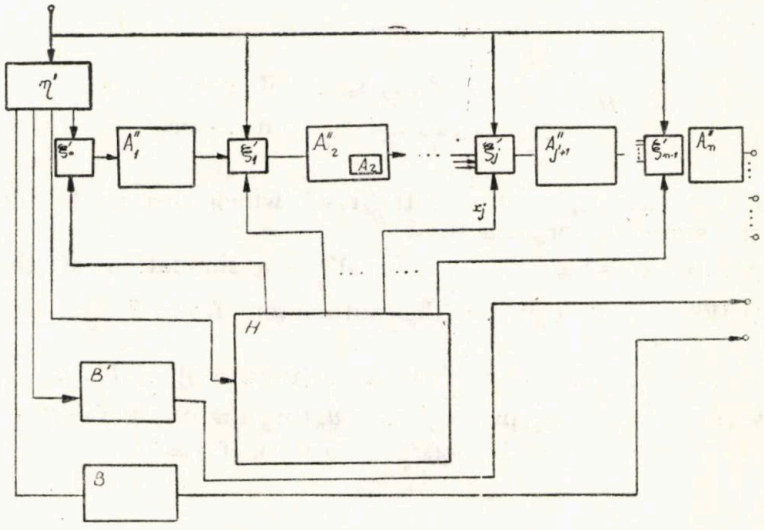


Fig. 2

The mappings $\eta' : [W^1; w_1, ..., w_m] \to \{i_0, i_1, i_2\}^2 \times \{e_W, w_1, ..., w_m\} \times [W^1; w_1, ..., w_m]$, $\xi'_0 : [W^1; w_1, ..., w_m] \times X_1 \to I_1$, $\xi'_j : [W^1; w_1, ..., w_m] \times S''_0 \times S''_1 ...$

$... \times S^j{}_{-1} \times X_{j+1} \to I_{j+1}, j = \overline{1, m-2}$, $H : \{e_W; w_1, ..., w_m\} \to \prod_{j=0}^{m-1} X_j$, are given by

$$\eta'(f)=\begin{cases}(i_0, i_1, e_W, f_{\eta(w)}), & \text{if } f=f_w,\\ (i_0, i_2, w_j, 1_W) & \text{if } f=f_j,\\ (i_0, i_0, e_W, 1_W), & \text{if } f=1_W,\end{cases}$$

$$\xi'_0(f, x)=\begin{cases}\eta(w), & \text{if } f=f_w, \quad x=x_0,\\ x_0, & \text{if } f=f_j,\\ i_0, & \text{if } f=1_W,\end{cases}$$

$$\xi'_j(f, s^0, s^1, \ldots, s^{j-1}, x_j)=\begin{cases}\xi_j(s^0, s^1, \ldots, s^{j-1}, w), & \text{if } f=f_w,\\ x_j, & \text{if } f=f_k,\\ i_0 \text{ or } s_0^j, & \text{if } f=1_W,\end{cases}$$

where s_0^j is the unit of the group S_{j+1} if the automaton A_{j+1} is an automaton related to a group.

Finally

$$H(w)=\begin{cases}(i_0, s_0^2, \ldots, s_0^{m-1}), & \text{if } w=e_W,\\ (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), & \text{if } w=w_j.\end{cases}$$

In the second case x_k, $k=\overline{1,n}$, is the reset which directs the automaton A'_{k+1} in the state u_k, $(\mathrm{pr}_k, u(w_j))$.

The triple $\psi=1_{[W^1;\ w_1,\ldots,w_m]}$, U, Y) is a simulation of the automaton $A([W^1; w_1, \ldots, w_m])$ by the automaton from Fig. 2, where:

$$U(f)=\begin{cases}(s_1, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w)), \ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w))), & \text{if } f=f_w,\\ (s_2, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_j)), \ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_j))), & \text{if } f=f_j,\\ (s_1, s_1, u_1(i_0), u_2(s_0^2), \ldots, u_n(s_0^n)), & \text{if } f=1_W\end{cases}$$

and

$$Y(s_B, s_{B'}, s_1'', s_2'', \ldots, s_n'')=$$

$$=\begin{cases}f_w, \text{ if } s_B=s_{B'}=s_1, \ s_1''=u_1(\mathrm{pr}_1 u(w)), \ldots, \ s_n''=u_n(\mathrm{pr}_n u(w)),\\ f_j, \text{ if } (s_B=s_2)\vee(s_{B'}=s_2), \ s_1''=u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_j)), \ldots,\\ \qquad\qquad s_n''=u_n(\mathrm{pr}_n u(w_j)),\\ \text{arbitrary, otherwise,}\end{cases}$$

because it makes commutative the diagram:

$$\begin{array}{ccc} [W^1;\ w_1,\ldots,w_m] & \xrightarrow{\ g_f\ } & [W^1;\ w_1,\ldots,w_m] \\ \Big\downarrow 1_{[W_1;\ w_1,\ldots,w_m]} & & \Big\uparrow Y \\ [W^1;\ w_1,\ldots,w_m] & \xrightarrow[\ \hat{g}_{U(f)}\ ]{} & S_B \times S_{B'} \times \prod_{j=1}^{n} S_j''. \end{array}$$

Here $\hat{g}$ is the output function of the cascade from Fig. 2. Indeed, we have:

$$g_f(f') = \begin{cases} f_{ww'}, \text{ if } f = f_w \text{ and } f' = f_{w'}, \\ f_h, \text{ if } f = f_j,\ f' = f_{w'}, \text{ and } w_j w' = w_h, \\ f_k, \text{ if } f' = f_k,\ \forall f, \\ f, \text{ if } f' = 1_W, \\ f', \text{ if } f = 1_W, \end{cases}$$

and

$$\hat{g}_{U(f)}(f') = \hat{g}(U(f), f') = \begin{cases} \hat{g}(s_1, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1\, u(w)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n\, u(w)), f') \\ \qquad \text{if } f = f_w, \\ \hat{g}(s_2, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1\, u(w_j)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n\, u(w_j)), f') \\ \qquad \text{if } f = f_j, \\ \hat{g}(s_1, s_1, u_1(s_1),\ldots, u_n(s_0^n), f'), \text{ if } f = 1_W. \end{cases}$$

We shall analize these three situations:

$$\hat{g}(U(f_w), f') = \begin{cases} (s_1, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(ww')),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(ww'))), \text{ if } f' = f_w, \\ (s_1, s_2, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_k)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_k))), \text{ if } f' = f_k, \\ (s_1, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w))), \text{ if } f' = 1_W. \end{cases}$$

Then, it holds:

$$\hat{g}(U(f_j), f') = \begin{cases} (s_2, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_h)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_h))), \text{ if } w_j w = w_h \text{ and } f' = f_w, \\ (s_2, s_2, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_k)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_k))), \text{ if } f' = f_h, \\ (s_2, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_j)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_j))), \text{ if } f' = 1_W. \end{cases}$$

Finally, we have:

$$\hat{g}(U(1_W), f') = \begin{cases} (s_1, s_1, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w')),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w'))), \text{ if } f' = f_{w'}, \\ (s_1, s_2, u_1(\mathrm{pr}_1 u(w_k)),\ldots, u_n(\mathrm{pr}_n u(w_k)))), \text{ if } f' = f_k, \\ (s_1, s_1, u_1(s_1),\ldots, u_n(s_0^n)), \text{ if } f' = 1_W. \end{cases}$$

The different values of $Y(\hat{g}_{U(f)}(f'))$ are given in the table 1:

Table 1

f \ f'	$f_{w'}$	f_k	1_W
f_w	$f_{ww'}$	f_k	f_w
f_j	f_h	f_k	f_j
1_W	$f_{w'}$	f_k	1_W

Examining this table we conclude that the diagram is commutative.

Remark 1. The proof remains almost the same if in the cascade from Fig. 2 the first automaton is not a flip-flop.

Remark 2. This new approach of the problem enables us to count the number of suplementary flip-flops which are needed for the simulation of the automaton $A([W^1; w_1, ..., w_m])$. Namely, this number is $2 + |J| + \sum_{j \in J} [\log_2 |S_j|]$, where $\{A_j | j \in J\}$ is the set of group-automata from Fig. 1.

Received, July 18, 1972

University „Al. I. Cuza", Jassy,
Department of Economical Mathematics
and Probabilities

REFERENCES

1. Arbib M. A., *Automaton Decompositions and Semigroup Extensions.* In *The Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups.* (M. A. Arbib, ed.), Academic Press, Inc., New York, 1968.
2. Arbib M. A., *Theories of Abstract Automata.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1969.
3. Zeiger H. P., *Yet another Proof of the Cascade Decomposition Theorem for Finite Automata.* Math. Syst. Theory, 1, 225–228 (1967).

ASUPRA REALIZĂRII AUTOMATULUI ATAŞAT EXTENSIEI UNUI SEMIGRUP

(Rezumat)

Este dată o altă abordare a problemei prelungirii simulării automatului unui semigrup la simularea automatului semigrupului extins. Se studiază de asemenea legătura dintre automatul extins al automatului unui semigrup şi automatul semigrupului extins, probleme importante în teoria descompunerii automatelor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

C.Z. 621.3.078.001.1

GRAPHO-ANALYTICAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF SELFOSCILLATIONS FOR A PARTICULAR CLASS OF NONLINEAR AUTOMATIC SYSTEMS

BY

LEOPOLD SEBASTIAN, N. NEGOESCU and TEOHARI GANCIU

1. Introduction

For the automatic nonlinear system shown in Fig. 1, the following relations can be written

$$(1)\quad \begin{cases} x_1(t) = G_1(p)\, x_a(t), \quad m_1(t) = F_1(x_1), \quad m_2(t) = F_2(x_a), \\ x_2(t) = G_2(p)\, m_2(t), \quad x_3(t) = m_1(t) + x_2(t), \quad x_e(t) = G_3(p)\, x_3(t), \\ x_r(t) = G_4(p)\, x_e(t), \quad x_a(t) = x_i(t) - x_r(t), \end{cases}$$

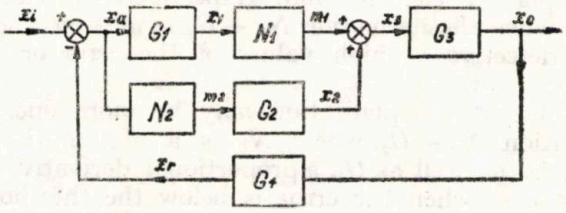


Fig. 1

where $F_1(x_1)$ and $F_2(x_a)$ are the nonlinear functions describing the nonlinearities N_1 and N_2, and $G_1(p) = \dfrac{h_i(p)}{q_i(p)}$, $(i = 1, \ldots, 4)$, are the linear operators with $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ characterizing the linear elements. Based on relations (1), the following relation may be obtained

$$(2)\qquad x_a(t) = x_i(t) - G_3(p)\, G_4(p)\, F_1(x_1) - G_2(p) G_3(p) G_4(p) F_2(x_a).$$

Now, we shall use the harmonic linearization method. If we consider symmetrical nonlinearities well-defined (no memory) then, the describing

functions of the nonlinearities have only real part and the output values of the nonlinearities become:

$$F_1(x_1) \approx q_1(A_1)x_1(t) = G_1(p)q_1(A_1)x_a(t), \tag{3_1}$$

and

$$F_2(x_a) \approx q_2(A_2)x_a(t). \tag{3_2}$$

Relation (2) becomes

$$x_i(t) = x_a(t) + G_1(p)G_3(p)G_4(p)q_1(A_1)x_a(t) + G_2(p)G_3(p)\,G_4(p)q_2(A_2)x_a(t). \tag{4}$$

The existence of the selfoscillations implies $x_i(t) = 0$, so (4) becomes

$$1 + G_1(p)G_3(p)G_4(p)q_1(A_1) + G_2(p)G_3(p)\,G_4(p)q_2(A_2) = 0. \tag{5}$$

The present work referrs to the particular case when

$$G_2(p) \equiv kG_1(p). \tag{6}$$

Equation (5) becomes

$$1 + G(p)[q_1(A_1) + kq_2(A_2)] = 0, \tag{7}$$

where

$$G(p) = G_1(p)G_3(p)\,G_4(p). \tag{8}$$

The relation (6) appears like a much too restrictive condition, but is frequently met with practice. In order to understand that, let us consider the elements G_1 and N_1, on the first link as a proportional and derivative linear equalizer element and, respectively, an electronic saturated amplifier. Then when the derivation $N_2 - G_2$ is missing, the control system equalization is defective at high values of the error or at high speed of variation of the error.

The control system equalization may be more operative if we provide the derivation $N_2 - G_2$, where N_2 is a non-inertial element with a dead zone, and G_2 as well as G_1, a proportional derivative linear equalizer element. In this case when the error is below the threshold of sensitivity of the non-linearity N_2, the link $N_2 - G_2$ is open. When the error x_a takes high values, the amplifier N_1 is saturated and the element N_2 allows the transfer of the signall so that the output x_2 compensates more or less the negative effect of the saturation of the amplifier N_1.

2. Determination of Selfoscillations

When the considered automatic control system produces selfoscillations then the characteristic equation (7) of the harmonical linearizated system has the solution

$$p = \pm \mathrm{j}\omega \tag{9}$$

and (7) becomes

$$1 + G(j\omega)\,[q_1(A_1) + kq_2(A_2)] = 0. \tag{10}$$

Because

$$G(j\omega) = G_{re}(\omega) + jG_{im}(\omega), \tag{11}$$

the considered system produces selfoscillations if the system of equations

$$\begin{cases} G_{re}(\omega)q_1(A_1) + G_{re}(\omega)kq_2(A_2) = -1, \\ G_{im}(\omega)q_1(A_1) + G_{im}(\omega)kq_2(A_2) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

is satisfied. It may be immediately observed that the condition (6) leads to the annuling of the system determinant (12). So, the method for determining the selfoscillations described in [1] is unpracticable here. We shall expose another method which is a particular case of the method exposed in [1].

It is imortant to observe that the system of equations (12), in accordance with R o u c h é's theorem, is compatible regarding $q_1(A_1)$ and $q_2(A_2)$, if, and only if,

$$G_{im}(\omega) = 0, \tag{13}$$

which is satisfied only when $\omega = \omega_0$ and

$$G_{re}(\omega_0) \neq 0. \tag{14}$$

In this case, the first equation of the system (12) becomes

$$q_1(A_1) + kq_2(A_2) = -\frac{1}{G_{re}(\omega_0)}. \tag{15}$$

On the other hand, when the condition $\omega = \omega_0$ is satisfied, from the first relation of the system (1) results

$$A_1 = |G_1(j\omega_0)|\,A_2. \tag{16}$$

The solutions of the system of equations (13), (15) and (16) leads to the knowledge of the selfoscillation pulsation ω_0, the amplitude A_1 of the input of the nonlinear element N_1 and the amplitude of the error A_2. The graphical method used for solving the system of equations is the following. At first the polar diagram of the function $G(j\omega)$ is plotted (Fig. 2). Evidently the relation (13) is satisfied for those pulsations who correspond to the points of intersection of the polar diagram with the real axis. The point N, corresponding to the pulsation $\omega = 0$, is excluded because the selfoscillations with $\omega = 0$ are not oscillations. The point O is also excluded because the relation (14) is not satisfied. In this case the selfoscillations have the pulsation ω_0, corresponding to point S.

Further on, the curves $q_1(A_1)$ and $q_2(A_2)$ have been plotted in second quadrant, respectively, in the fourth quadrant (Fig. 3). In the third quadrant, having the coordinates A_1 and A_2, the line D_1 has been plotted described by the equation (16), and in the first quadrant, having the coordinate $q_1(A_1)$, $q_2(A_2)$, the line D_2 described by the equation (15), in which $G_{re}(\tau w_0) = -\lambda$, $(\lambda > 0)$.

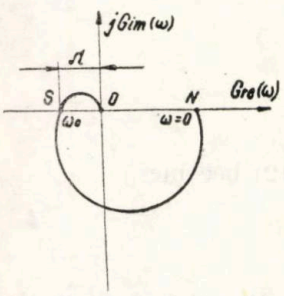


Fig. 2

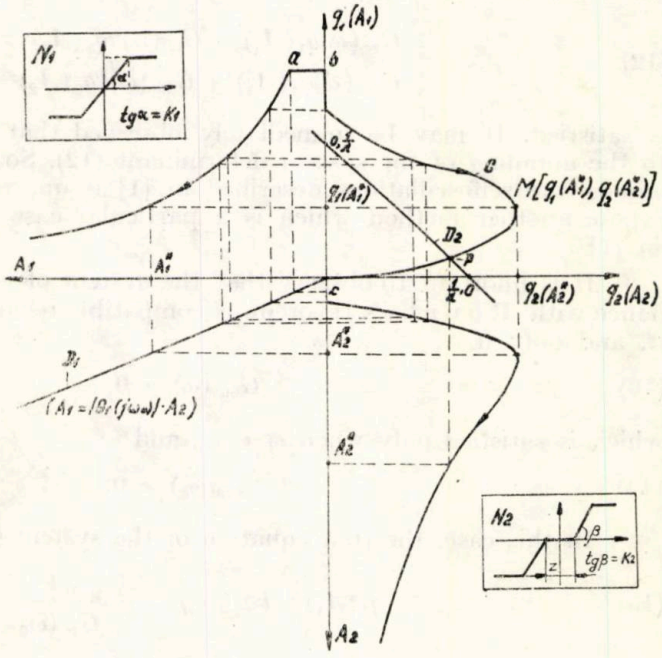


Fig. 3

The amplitude A_1 of the oscillation at the input of the nonlinear element N_1 is considered as an independent variable. For a certain value A_1^* of this amplitude on the curve $q_1(A_1)$ the value $q_1(A_1^*)$ is determined. For the same value A_1^* on the line D_1, the corresponding amplitude value A_2^* of the oscillations at the input of the nonlinear element N_2 is also determined. This value corresponds to the value $q_2(A_2^*)$ on curve $q_2(A_2)$. With these two values in the first quadrant, the point $M(q_1(A_1^*), q_2(A_2^*))$ is readely found. The locus of these points represents the curve C. Thus, values ω_0, A_1^* and A_2^* satisfy relations (13) and (16). In addition, in the points of intersection of curve C and line D_2 the relation (15) is obviously satisfied. Let $P(q_1(A_1^0), q_2(A_2^0))$ be such a point. At the values $q_1(A_1^0)$ and $q_2(A_2^0)$ on the curves $q_1(A_1)$ and $q_2(A_2)$ correspond the values A_1^0 and respectively A_2^0, which together with ω_0 represent a solution of the system of equations (13), (15) and (16).

Thus, the automatic control system allows selfoscillations with the pulsation ω_0, having the amplitude A_1^0 at the input of the nonlinear element N_1 and the amplitude A_2^0 of the error of the system. When the curves D_2 and C are not intersected, there are no selfoscillations in the system and, of course, when the two curves have k points of intersection, there are k-selfoscillations types, all of pulsation ω_0. The above operations are carried out for all pulsations for which $G_{\text{im}}(\omega) = 0$, excepting the points mentioned above.

We also except the points of intersection of the polar diagram $G(j\omega)$ with the real positive axis. If $G_{\text{re}}(\omega_0) > 0$ then the curve C and the line D_2 are not intersected. When k types of selfoscillations exist, it is necessary to find which of the selfoscillations are stable and which are not.

It results that, in the first place, the method of determination of selfoscillations, shown in [1], is unpracticable if $G_2(p) \equiv kG_1(p)$ in the case when the open loop of the automatic control system contains nonlinear networks (like that in Fig. 1) conected. In the second place, for this last case the work indicates a new method, similar to E. J. D a v i s o n's method 2], which was elaborated for the automatic control system with two non inearities in series, separated by a linear element.

3. Example

Let us consider that the linear elements are described by the functions

$$G_1(p) = \frac{1 + \tau_d p}{1 + \tau_1 p}, \quad \text{with } \tau_1 = 0{,}1 \text{ s}, \quad \tau_d = 0{,}05 \text{ s},$$

$$G_2(p) = k \frac{1 + \tau_d p}{1 + \tau_1 p},$$

$$G_3(p) = \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)}, \quad \text{with } k_m = 0{,}15, \quad \tau_m = 0{,}2 \text{ s},$$

$$G_4(p) = 1.$$

Let two nonlinearities, the first (N_1) having a statical characteristic with saturation (Fig. 4 *a*), with $x_{1\text{sat}} = 0{,}1$ V and $\text{tg}\,\alpha = k_1 = 500$, and the second ($N_2$) with a dead zone (Fig. 4 *b*), with $z = 0{,}2$ V and $\text{tg}\,\beta = k_2 = 200$. For the determination of the selfoscillation, let us calculate

$$G(j\omega) = \frac{k_m[(\tau_d - \tau_1 - \tau_m) - \omega^2 \tau_1 \tau_m \tau_d]}{(1 + \omega^2 \tau_1^2)(1 + \omega^2 \tau_m^2)} - j \frac{k_m [1 - \omega^2(\tau_1 \tau_m - \tau_d \tau_m - \tau_1 \tau_d)]}{\omega(1 + \omega^2 \tau_1^2)(1 + \omega^2 \tau_m^2)}.$$

The relation (13) implies

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_m - \tau_d(\tau_1 + \tau_m)}}.$$

With this values it results $\omega_0 = 14{,}14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ and respectively

$$G_{re}(\omega_0) \approx -\frac{1}{400}.$$

The relations (15) and (16) become

$$q_1(A_1) + k\, q_2(A_2) = -\frac{1}{G_{re}(\omega_0)} \approx 400,$$

respectively

$$A_1 = A_2 \sqrt{\frac{\tau_1\tau_m - \tau_d(\tau_1 + \tau_m) + \tau_d^2}{\tau_1\tau_m - \tau_d(\tau_1 + \tau_m) + \tau_1^2}} = 0{,}707 A_2 .$$

The describing functions of the nonlinear elements are

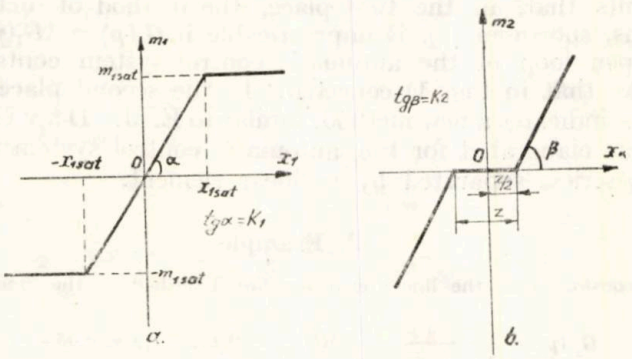


Fig. 4

$$q_1(A_1) = \begin{cases} \dfrac{k_1}{\pi}(2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1), & \text{for } A_1 \geq x_{1\text{sat}}, \\ k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m_{1\text{sat}}}{x_{1\text{sat}}} = 500, & \text{for } A_1 \leq x_{1\text{sat}} \end{cases}$$

where

$$\sin\alpha_1 = \frac{x_{1\text{sat}}}{A_1} = \frac{0{,}1}{A_1},$$

and

$$q_2(A_2) = \begin{cases} k_2 - \dfrac{k_2}{\pi}(2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2), & \text{for } A_2 \geq \dfrac{z}{2}, \\ 0, & \text{for } A_2 \leq \dfrac{z}{2}, \end{cases}$$

with

$$\sin \alpha_2 = \frac{z}{2A_2} = \frac{0{,}1}{A_2} \text{ and } k_2 = \operatorname{tg} \beta = 200.$$

Using the indicated graphical-plotting, we trace the curves $\frac{q_1(A_1)}{k_1}$, $\frac{q_2(A_2)}{k_2}$ and the line D_2 (fig. 5).

In the accounted coordinates, the lines D_2 for $k_1 = 500$ and $k_2 = 200$, becomes:

$$\frac{q_1(A_1)}{k_1} + 0{,}4k\,\frac{q_2(A_2)}{k_2} = 0{,}8.$$

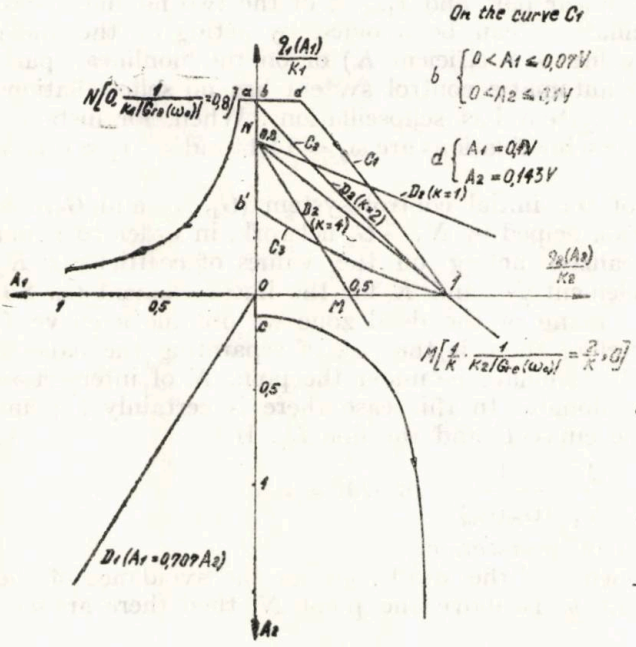


Fig. 5

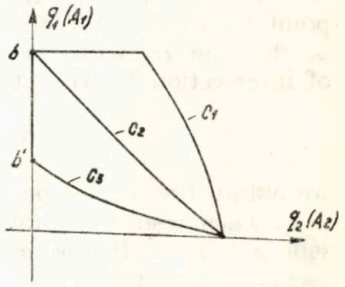


Fig. 6

In the Fig. 5 we have been plotted three lines D_2 for $k=1, 2$ and 4. The coordinates of the points of intersection, M and N, are

$$M\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k_2|G_{re}(\omega_0)|} = \frac{2}{k},\ 0\right) \text{ and } N\left(0,\ \frac{1}{k_1|G_{re}(\omega_0)|} = 0{,}8\right).$$

In the same figure the corresponding curve C_1 is traced. Curve C can have one of the forms represented in the Fig. 6, depending on the slope of line D_1, x_{1sat} and z. Thus, if in Fig. 5, $A_1/A_2 = |G_1(j\omega_0)| = \overline{ab}/\overline{Oc}$ then we obtain the curve C_2, if $A_1/A_2 < \overline{ab}/\overline{Oc}$ then we obtain the curve C_1 and if $A_1/A_2 > \overline{ab}/\overline{Oc}$ then results the curve C_3.

4. Conclusions

Based on Fig. 5 we can conclude that:

1. There are no selfoscillations in the considered automatic control system, if the curve C doesn't intersects line D_2. This can be the case when, for instance, k_1 and kk_2 have high values, or a very low values. In the first case curve C, when A_1 and A are rising, is situated on the left of the line D_2 and in the second case on the right.

2. There are selfoscillations depending on the parameters of the line D_2, therefore by the coefficients α and β of the two nonlinearities and K and $|G_{re}(\omega_0)|$ of the linear part, as well as by the form of the curve C, therefore by $G_1(j\omega_0)$ of the linear part and x_{1sat}, z of the two nonlinearities.

Therefore the selfoscillations can be avoided by acting on the linear part (especially on the value of coefficient K) or on the nonlinear part. In our case if $K > 2$ the automatic control system has no selfoscillations and if $K < 2$ the control system has selfoscillations. When, for instance, $K = 1$ the parameters of the selfoscillations are $\omega_0 = 14{,}14$ rad/s, $A_1 \approx 0{,}22$ V and $A_2 \approx 0{,}32$ V.

3. If the elements of the initial control system (G_1, N_1 and G_3) are fixed, the dynamic correction helped by $N_2 - G_2$ network, in order to avoid selfoscillations, can be realized acting on the values of coefficients K_2 and z of the nonlinear element N_2 and K for the linear element G_2. So, if $1/K_1|G_{re}(W_0)| < 1$ then rising of the dead zone we obtaine a curve C hawing the form C_3; therefore there is the risk of separating the balance point b' of this curve on the ordonate be under the point N of intersection of the line D_2 with the ordonate. In this case there is certainly a point of intersection between the curve C and the line D_2. If

$$K > \frac{1}{K_2} \cdot \frac{1}{|G_{re}(\omega_0)|} \quad \text{or} \quad \overline{OM} > 1$$

we obtain the second point of intersection.

Then results the influence of the dead zone for the avoidance of the selfoscillations. If the point b' is above the point N, then there are selfoscillations only if

$$K < \frac{1}{k_2 |G_{re}(\omega_0)|}.$$

As general conclusion, we can appreciate that this method shows the posibilities for dynamical correction of the nonlinear automatic control systems with only one nonlinearity, in order to avoid selfoscillations, by the second nonlinear circuit in derivation with the first circuit.

This method establishes the posibilities and conditions to correct the control system such as to have selfoscillations.

Received, September 21, 1973

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Electrical Utilisations
and Automation,
and Teritorial Computation Center, Jassy

REFERENCES

1. Negoescu N., Sebastian L., *Grapho-Analytical Method for the Determination of Self-Sustained Oscillations for a Class of Automatic Nonlinear Systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, **AC—16**, *3* (1971).
2. Davison E. J., *Application of the Describing Function Technique in a Single-Loop Feedback System with Two Nonliniarities.* IEEE Trans. on Automatic Control, **AC—13**, *2* (1968).
3. Jud H. G., *Limit Cycle Determination for Parallel Linear and Nonlinear Elements.* IEEE Trans. on Automatic Control, **AC—9**, *3* (1964).
4. Gran R., Rimer M., *Stability Analysis of System with Multiple Nonliniarities.* IEEE Trans. on Automatic Control, **AC—10**, *1* (1965).
5. Freeman E. A., *Stability Analysis of Control Systems having two Nonlinear Elements.* Proc. Inst. Elec. Eng. (London), **109 C**, *7* (1962).
6. Попов Е. П., Пальтов И. П., *Приближетнные методы исследования нелинейных автоматических систем.* Физматгиз, М., 1960.

ASUPRA UNEI METODE GRAFO-ANALITICE DE DETERMINARE A AUTOOSCILAȚIILOR UNEI CLASE PARTICULARE DE SISTEME AUTOMATE NELINIARE

(Rezumat)

Metoda se referă la sistemele automate cu două circuite neliniare derivație, la care elementele intermediare liniare au funcții de transfer proporționale. Neliniaritățile respective se consideră simetrice și univoce (fără bucle). În lucrare se face uz de liniarizarea armonică și se stabilesc condițiile de existență a autooscilațiilor unor asemenea sisteme. Lucrarea este însoțită de un exemplu aplicativ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

C.Z. 621-52 : 626.01 : 621.9

CONTRIBUŢII LA CALCULUL SISTEMELOR HIDRAULICE DE URMĂRIRE ALE MAŞINILOR UNELTE DE PRELUCRAT PRIN COPIERE DUPĂ ŞABLON RIGID

DE

GH. CAŞLER, I. CONDREA şi VLADIMIR BURGARD

1. Introducere

Extinderea utilizării sistemelor de comandă hidraulice în cele mai diverse ramuri ale construcţiei de maşini este un fapt incontestabil, chiar dacă există o anumită rezervă din partea unor beneficiari, rezervă determinată, poate, în primul rînd, de lipsa unor specialişti (muncitori, tehnicieni, ingineri), dar şi de unele dificultăţi inerente unor astfel de sisteme. În orice caz, instruirea specială a celor implicaţi în exploatare, fără a mai discuta de cei din proiectare, de constructorii de sisteme hidraulice de comandă, nu poate fi neglijată fără consecinţe economice importante, determinate de pierderea rapidă a performanţelor sistemelor, de scoaterea prematură din funcţie.

Sistemele hidraulice de urmărire (SHU) sînt pe larg folosite în construcţia de maşini ca mijloc eficace de automatizare. În construcţia de maşini-unelte, SHU sînt utilizate în sistemele de copiere cu şablon rigid, pentru efectuarea unor operaţii de divizare precise, constituie baza majorităţii sistemelor comenzii program numerice. Cu astfel de sisteme sînt prevăzute şi strungurile de copiat hidraulice. Acestea sînt folosite azi nu numai pentru prelucrarea unor suprafeţe de revoluţie complexe, ci şi pentru prelucrarea unor piese de tipul arborilor în trepte care, în cazul producţiei de serie sau masă, ar putea fi prelucrate pe strunguri semiautomate cu mai multe cuţite. În comparaţie cu acestea din urmă, strungurile de copiat hidraulice se remarcă printr-o productivitate mai ridicată, rigiditate, asigurarea unei precizii stabile şi calităţi înalte a suprafeţei prelucrate.

SHU aplicate în construcţia maşinilor-unelte sînt sisteme destul de complexe. Există o varietate mare de astfel de sisteme, atît din punct de vedere al schemelor de principiu, cît şi din cel al construcţiei, care implică o diversitate mare a calculelor de proiectare. Pe de altă parte, cercetările experimentale şi practica arată că chiar cel mai simplu SHU reprezintă de fapt un sistem complex. Pentru punerea la punct a construcţiei experimentale se consumă încă mult timp şi mijloace.

Cercetarea în domeniul copierii hidraulice este necesară nu numai pentru uzina constructoare, ci şi pentru uzina care utilizează maşini-unelte de copiat. O exploatare raţională impune atît cunoaşterea aspectelor legate de tehnologia prelucrării, de procesele de aşchiere, cît şi abordarea problemei din punctul de vedere al automaticii.

Diagnosticarea defecţiunilor, repararea şi punerea la punct a unor astfel de maşini-unelte este o problemă complexă, necesitînd înţelegerea globală a SHU.

Cunoaşterea caracteristicilor statice şi dinamice — relaţii între parametrii constructivi şi funcţionali ai SHU — constituie o cale de abordare a problemei. Cercetarea preciziei şi stabilităţii — cele două aspecte esenţiale între care se realizează compromisul — este posibilă numai pe baza metodelor puse la dispoziţie de teoria reglării automate, fie considerînd, într-o primă aproximaţie, sistemul liniar, fie admiţîndu-l neliniar.

În cele ce urmează se efectuează o analiză a strungului de copiat KDM 28/7-F, în funcţie la Fabrica de Rulmenţi, Bîrlad. Într-o primă Notă se determină caracteristicile statice, se efectuează un studiu al funcţionării în regim dinamic, determinîndu-se funcţiile de transfer, ecuaţia caracteristică şi stabilindu-se schema structurală. Într-o a doua Notă vor fi prezentate rezultatele analizei pe calculatorul analogic şi rezultatele încercărilor privind precizia de prelucrare, efectuate pe strung.

2. Determinarea caracteristicilor statice ale SHU al strungului KDM 28/7-F

SHU al acestui strung este de tipul cu sertar cu o muchie şi cu supapă de presiune constantă. În regim permanent, adică la viteză şi sarcină constante, precizia şi rigiditatea SHU sînt determinate de *caracteristicile* lor *statice*. Caracteristicile statice exprimă o dependenţă funcţională între eroarea de copiere, viteza de urmărire (viteza saniei de copiat) şi sarcina statică ce acţionează asupra saniei. Ecuaţiile caracteristicilor statice rezultă din sistemul de ecuaţii de continuitate, echilibru static şi ale curgerii prin orificii.

Schema de principiu a SHU este redată în fig. 1.

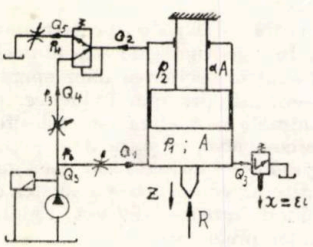


Fig. 1.

Ecuaţia de echilibru al saniei de copiere este

$$p_1 A - \alpha p_2 A = R \,, \tag{2.1}$$

unde: $\alpha < 1$ reprezintă raportul ariilor corespunzătoare celor două camere, R — sarcina, p_1, p_2 — presiunile în cele două camere.

Ecuațiile de continuitate sînt:

$$Q_s = Q_1 + Q_4 = \text{const.}, \quad (2.2)$$

$$Q_5 = Q_2 + Q_4, \quad (2.3)$$

$$Q_1 = Q_3 + Av, \quad (2.4)$$

$$Q_2 = \alpha Av. \quad (2.5)$$

Ecuațiile de curgere prin orificii (drosele, supapă, sertar de copiere) sînt:

$$Q_1 = kf_1\sqrt{p_s - p_1}, \quad (2.6)$$

$$Q_4 = kf_2\sqrt{p_s - p_3}, \quad (2.7)$$

$$Q_4 = k_1 d_1 h\sqrt{p_3 - p_2}, \quad (2.8)$$

$$Q_5 = k_1 d_1 h\sqrt{p_2 - p_4}, \quad (2.9)$$

$$Q_3 = k_1 d(h_0 - x)\sqrt{p_1}, \quad (2.10)$$

$$Q_5 = kf_3\sqrt{p_4}. \quad (2.11)$$

Ecuația de echilibru static al plunjerului supapei este

$$T = ap_2 = \text{const.}, \quad (2.12)$$

unde: f_1, f_2, f_3 — secțiunile orificiilor droselelor *1*, *2*, *3*, k — coeficientul de debit prin drosele, k_1 — coeficientul de debit prin supapă și sertarul de copiere, h — deschiderea în poziție medie a supapei, h_0 — deschiderea sertarului de copiere la $v = 0$ și $R = 0$, d_1, d — diametrele supapei și sertarului de copiere, a — aria plunjerului supapei pe care se exercită presiunea p_2, T — forța arcului supapei.

Considerînd coeficientul de transmitere prin pîrghie, între palpator și sertar, i, între eroarea de urmărire (copiere) și deplasarea sertarului se poate scrie relația

$$\varepsilon i = x. \quad (2.13)$$

Prin rezolvarea sistemului constituit de cele **13** ecuații rezultă ecuația caracteristicii statice, care furnizează eroarea în funcție de viteza de urmărire și de sarcina statică:

$$\varepsilon = \frac{h_0}{i} - \frac{Q_s - (1-\alpha)Av - kf_3\sqrt{\dfrac{p_2}{1 + (kf_3/k_1 d_1 h)^2}}}{ik_1 d\sqrt{\dfrac{R}{A} + \alpha p_2}}, \quad (2.14)$$

precum și variația presiunii la intrare în sistem, în funcție de v și R:

$$p_s = \frac{R}{A} + \alpha p_2 + \left\{\frac{Q_s - \left[\sqrt{\dfrac{p_2}{(k_1 d_1 h)^2 + (kf_3)^2}} - \dfrac{\alpha A}{k_1 d_1 h} v\right]}{kf_1}\right\}^2, \quad (2.15)$$

unde :

$$h_0 = \frac{kf_1}{k_1 d}\sqrt{\frac{p_0}{\alpha p_2}}, \quad p_0 = p_s\Big|_{R=0;\, v=0}. \tag{2.16}$$

Precizia statică este definită de următorii indicatori :

a) Factorul de amplificare în viteză ;

$$k_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\right|_{R=0} = \frac{k_1 di\sqrt{\alpha p_2}}{(1-\alpha)A}. \tag{2.17}$$

b) Factorul de amplificare în sarcină (numit și rigiditate) :

$$k_R = \left|\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right|_{v=0} = \frac{2Ai\left[Q_s - kf_3\sqrt{\dfrac{p_2}{1+(kf_3/k_1d_1h)^2}}\right]^2}{(k_1 d)^2 (h_0 - i\varepsilon)^3}. \tag{2.18}$$

3. Studiul SHU în regim dinamic

Informații mai complete asupra calității funcționării SHU, asupra preciziei de copiere cît și asupra stabilității sistemului se obțin pe baza studiului în regim dinamic. Precizia și rigiditatea SHU pot fi determinate numai în condițiile stabilității mișcării organului de lucru al mașinii. Pentru a găsi condițiile de funcționare stabilite sub formă generală, trebuie analizat în prealabil modelul liniar al SHU, neglijînd, într-o primă aproximație, neliniarități importante, de tipul frecării uscate și saturației și liniarizînd caracteristicile statice ale sistemului. Desigur, utilizarea unui astfel de procedeu este valabil numai pentru abateri mici ale coordonatelor de la valorile lor de regim. De observat că aceste ipoteze nu sînt excesiv de restrictive și că teoria liniară este pe deplin acceptabilă din punct de vedere teoretic și practic.

Ecuația diferențială a mișcării sculei este

$$M\frac{dv}{dt} + N\Delta v = A(\Delta p_1 - \alpha \Delta p_2). \tag{3.1}$$

Deoarece se examinează procesele tranzitorii în jurul valorilor de regim ale coordonatelor (variabilelor), se introduc coordonatele adimensionale, egale cu rapoartele dintre creșteri și valorile de regim :

$$\overline{v} = \frac{\Delta v}{v_0}, \quad \overline{p}_1 = \frac{\Delta p_1}{p_{10}}, \quad \overline{p}_2 = \frac{\Delta p_2}{p_{20}} \quad \text{etc.}$$

Ecuația (3.1) devine după unele transformări,

$$\frac{M}{N}\cdot\frac{d\bar{\bar{v}}}{dt}+\bar{\bar{v}}=\frac{Ap_{10}}{Nv_0}\left(\bar{\bar{p}}_1-\alpha\frac{p_{20}}{p_{10}}\bar{\bar{p}}_2\right).$$

Dar, $p_{10}=\alpha p_{20}+R/A$, $p_{20}=T/a=\text{const.}$ și deci,

$$\frac{M}{N}\cdot\frac{d\bar{\bar{v}}}{dt}+\bar{\bar{v}}=\frac{A}{Nv_0}\left(\alpha p_{20}+\frac{R}{A}\right)\left(\bar{\bar{p}}_1-\alpha\frac{p_{20}}{\alpha p_{20}+R/A}\bar{\bar{p}}_2\right)=k_0(\bar{\bar{p}}_1-C_1\bar{\bar{p}}_2).$$

În condiții inițiale nule, ecuația se poate scrie, aplicînd transformata Laplace

$$\bar{\bar{v}}(T_0s+1)=k_0(\bar{\bar{p}}_1-C_1\bar{\bar{p}}_2),$$

unde $T_0=M/N$ — constanta de timp a organului de lucru al mașinii,

$$C_1=\frac{1}{1+R/\alpha Ap_{20}};\qquad k_0=\frac{\alpha Ap_{20}}{Nv_0}\left(1+\frac{R}{\alpha Ap_{20}}\right),\quad s\equiv\frac{d}{dt}.$$

În absența sarcinii, $C_1=1$, $k_0=\alpha Ap_{20}/Nv_0$.

Notînd $\bar{\bar{p}}_1-C_1\bar{\bar{p}}_2=\varphi$, unde φ caracterizează variația relativă a diferenței de presiune în cavitățile cilindrului, atunci funcția de transfer a obiectului (saniei de copiere) poate fi scrisă sub forma:

$$W_0(s)=\frac{\bar{\bar{v}}(s)}{\varphi(s)}=\frac{k_0}{T_0s+1}. \tag{3.2}$$

Este ușor de observat că (3.2) reprezintă funcția de transfer a unei verigi aperiodice. În cazul unei caracteristici de frecare „căzătoare" în ghidaje $N<0$ și funcția de transfer a saniei descrie o verigă nestabilă, întrucît $k_0<0$ și $T_0<0$. Totuși, prezența unei verigi instabile încă nu implică instabilitatea sistemului de comandă. Dacă forța de frecare nu depinde de viteză sau dacă dependența este neglijabilă, $N=0$ și

$$W_0(s)=\frac{1}{T_c's}, \tag{3.3}$$

unde

$$T_0'=\frac{M_{v0}}{A\alpha p_{20}(1+R/\alpha Ap_{20})}.$$

Funcția de transfer (3.3) descrie o verigă integratoare.

S-a notat cu M — masa ansamblului mobil, redusă la piston, N — factorul de amortizare (frecarea vîscoasă).

Ecuațiile de continuitate (2.4) și (2.5) sînt valabile numai pentru caracteristicile statice, adică în regim permanent. La examinarea proceselor tranzitorii (în regim dinamic) trebuie considerată și compresibilitatea fluidului în cilindru și conducte, ca și elasticitatea acestora, și, de asemenea, scurgerile de fluid. În cele ce urmează va fi considerată numai compresibilitatea fluidului în cilindru, astfel că ecuațiile (2.4) și (2.5) devin:

$$(3.4)\qquad Q_1 - Q_3 = Av + \frac{AH_1}{E_0}\cdot\frac{dp_1}{dt} = Av + \frac{A\psi H}{E_0}\cdot\frac{dp_1}{dt}, \quad H_1 = \psi H,$$

$$(3.5)\qquad Q_2 = \alpha Av - \frac{\alpha AH_2}{E_0}\cdot\frac{dp_2}{dt} = \alpha Av - \frac{\alpha(1-\psi)AH}{E_0}\cdot\frac{dp_2}{dt},$$

$$H_2 = (1-\psi)H,$$

unde H_1, H_2 sînt lungimile camerelor cilindrului, $H = H_1 + H_2 = \text{const}$. De asemenea, dacă se consideră și dinamica supapei de presiune constantă ecuațiile (2.8), (2.9) și (2.12) devin:

$$(3.6)\qquad Q_4 = k_1 d_1 (h - y)\sqrt{p_3 - p_2}, \quad (3.7)\qquad Q_5 = k_1 d_1 (h + y)\sqrt{p_2 - p_4},$$

$$(3.8)\qquad m\ddot{y} + n\dot{y} + k_e y + T = p_2 a,$$

unde: y — deplasarea plunjerului supapei, m — masa plunjerului, n — factorul de amortizare, k_e — constanta elastică a arcului supapei, a — aria pe care se exercită presiunea p_2.

Pentru a determina valorile de regim ale celorlalți parametri se ține seama că:

$$y_0 = 0, \qquad p_{20} = \frac{T}{a}$$

și se are în vedere că din (2.9) și (2.11) rezultă:

$$p_{40} = \frac{p_{20}}{1 + (kf_3/k_1 d_1 h)^2}, \qquad p_{10} = \alpha p_{20} + \frac{R}{A},$$

din (2.5), (2.8) și (2.9):

$$p_{30} = p_{20} + \left[\sqrt{p_{20} - p_{40}} - \frac{\alpha A v_0}{k_1 d_1 h}\right]^2,$$

iar din (2.8) și (2.9):

$$p_{s0} = p_{30}\left[1 + \left(\frac{k_1 d_1 h}{kf_2}\right)^2\right] - p_{20}\left(\frac{k_1 d_1 h}{kf_2}\right)^2$$

După cum se observă din ecuațiile (2.6)...(2.11), debitele sînt funcții neliniare de căderea de presiune. Liniarizînd aceste ecuații prin dezvoltare în serie Taylor:

$$(3.9)\qquad \Delta Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial p_s}\bigg|_0 \Delta p_s + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\bigg|_0 \Delta p_1 = \frac{kf_1}{2\sqrt{p_{s0} - p_{10}}}(\Delta p_s - \Delta p_1) = B_1(\Delta p_s - \Delta p_1),$$

$$(3.10)\qquad \Delta Q_4 = \frac{kf_2}{2\sqrt{p_{s0} - p_{30}}}(\Delta p_s - \Delta p_3) = B_2(\Delta p_s - \Delta p_3),$$

$$(3.11)\qquad \Delta Q_4 = -k_1 d_1 \sqrt{p_{30} - p_{20}}\,\Delta y + \frac{k_1 d_1 h}{2\sqrt{p_{30} - p_{20}}}(\Delta p_3 - \Delta p_2) = -B_3 \Delta y + B_4(\Delta p_3 - \Delta p_2),$$

$$(3.12)\qquad \Delta Q_5 = k_1 d_1 \sqrt{p_{20} - p_{40}}\,\Delta y + \frac{k_1 d_1 h}{2\sqrt{p_{20} - p_{40}}}(\Delta p_2 - \Delta p_4) = B_5 \Delta y + B_6(\Delta p_2 - \Delta p_4),$$

$$(3.13)\qquad \Delta Q_3 = -k_1 d \sqrt{p_{10}}\,\Delta x + \frac{k_1 d h_0}{2\sqrt{p_{10}}}\Delta p_1 = -B_7 \Delta x + B_8 \Delta p_1,$$

$$(3.14)\qquad \Delta Q_5 = \frac{kf_3}{2\sqrt{p_{40}}}\Delta p_4 = B_9 \Delta p_4,$$

ecuațiile (3.8), (2.2) și (2.3) devin:

$$(3.15)\qquad m(\ddot{\Delta y}) + n(\dot{\Delta y}) + k_e(\Delta y) = a\Delta p_2,$$

$$(3.16)\qquad \Delta Q_1 + \Delta Q_4 = 0, \qquad (3.17)\qquad \Delta Q_5 = \Delta Q_2 + \Delta Q_4.$$

Eliminînd din ecuațiile (3.4), (3.5) (considerate în variații de parametri) (3.9)...(3.17) mărimile ΔQ_1, ΔQ_2, ΔQ_3, ΔQ_4, ΔQ_5, Δp_3, Δp_4, Δp_5, Δy, se găsește:

$$\Delta p_1 = \frac{(B_7 D_6 - D_2 D_4)\Delta x - [(1-\alpha)D_6 - D_2 D_5]A\Delta v}{D_6 D_1 + D_2 D_3},$$

$$\Delta p_2 = \frac{(D_4 D_1 + B_7 D_3)\Delta x - [(1-\alpha)D_3 + D_1 D_5]A\Delta v}{D_6 D_1 + D_2 D_3},$$

în care, în afară de notaţiile care rezultă din (3.9)...(3.14), se introduc şi următoarele :

$$
(3.18)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{B_5B_9a}{(B_6+B_9)(ms^2+ns+k_e)} + \dfrac{B_6B_9}{B_6+B_9} + \dfrac{\alpha(1-\psi)AH}{E_0}s \equiv \\ \qquad \equiv \dfrac{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{ms^2+ns+k_e}, \\ D_2 = B_8 + \dfrac{\psi AH}{E_0}\,s \equiv b_1s + b_0\,, \quad D_3 = B_4 + \dfrac{aB_3}{ms^2+ns+k_e} \equiv \\ \qquad \equiv \dfrac{c_2s^2+c_1s+c_0}{ms^2+ns+k_e}, \\ D_4 = B_7 + \dfrac{B_4B_5(B_1+B_2)}{B_1B_2} \equiv d_0\,, \quad B_5 = 1 + \dfrac{B_4(B_1+B_2)}{B_1B_2} \equiv e_0, \\ D_6 = \dfrac{B_4}{B_2}\left[B_8 + B_2 + \dfrac{B_2B_8}{B_1} + \dfrac{\psi AH}{E_0}\left(1+\dfrac{B_2}{B_1}\right)s\right] \equiv g_1s + g_0\,. \end{cases}
$$

Substituind expresiile lui Δp_1 şi Δp_2 în ecuaţia echilibrului dinamic al saniei de copiere, scrisă sub forma :

$$
(3.19)\qquad M\frac{\mathrm{d}(\Delta v)}{\mathrm{d}t} + N(\Delta v) = A\left(\Delta p_1 - \alpha\Delta p_2 - \frac{\Delta R}{A}\right),
$$

rezultă :

$$
\begin{aligned}
&\Big\{(Ms+N)\left[\frac{(a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0)(g_1s+g_0)}{ms^2+ns+k_e} + \right. \\
&\left. + \frac{(c_2s^2+c_1s+c_0)(b_1s+b_0)}{ms^2+ns+k_e}\right] + A^2\left[(1-\alpha)\frac{c_2s^2+c_1s+c_0}{ms^2+ns+k_e} + \right. \\
&\left. + e_0\frac{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{ms^2+ns+k_e} + \alpha e_0(b_1s+b_0) - \alpha(1-\alpha)(g_1s+g_0)\right]\Big\}\bar{\bar{v}} + \\
&+ \frac{R_0}{v_0}\left[\frac{(a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0)(g_1s+g_0)}{ms^2+ns+k_e} + \frac{(c_2s^2+c_1s+c_0)(b_1s+b_0)}{ms^2+ns+k_e}\right]\bar{\bar{R}} = \\
&= A\left[d_0\frac{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{ms^2+ns+k_e} + B_7\frac{c_2s^2+c_1s+c_0}{ms^2+ns+k_e} - \right. \\
&\left. - \alpha B_7(g_1s+g_0) + \alpha(b_1s+b_0)d_0\right]\frac{\bar{\bar{\varepsilon i}}}{k_v},
\end{aligned}
$$

în care

$$\frac{\Delta x}{v_0} = \frac{\Delta x}{v_0} \cdot \frac{x_0}{x_0} = \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}}{k_v} i, \text{ cu } k_v = \frac{v_0}{\varepsilon_0},\ \varepsilon_0 i = x_0,\ \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Dacă se notează cu $\mathfrak{P}_i$ un polinom în s de gradul i, ecuația (**3.20**) se poate scrie sub forma :

$$\left[(Ms + N) \frac{\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_2} + A^2 \frac{\mathfrak{P}_3'}{\mathfrak{P}_2} \right] \bar{\bar{v}} + \frac{\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_2} \cdot \frac{R_0}{v_0} \bar{\bar{R}} = \frac{Ai}{k_v} \cdot \frac{\mathfrak{P}_3'}{\mathfrak{P}_2} \bar{\bar{\varepsilon}},$$

sau

$$\mathfrak{P}_5 \bar{\bar{v}} + \mathfrak{P}_4 \bar{\bar{R}} = \mathfrak{P}_3 \bar{\bar{\varepsilon}}. \tag{3.21}$$

Între viteza palpatorului (proporțională cu panta profilului șablonului) v_x, viteza saniei și eroarea ε se poate scrie relația (ecuația legăturii inverse) ;

$$v_x - v = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = s\varepsilon,$$

sau

$$\bar{\bar{v}}_x - \bar{\bar{v}} = s\bar{\bar{\varepsilon}} \frac{\varepsilon_0}{v_0} = s \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}}{k_v}. \tag{3.22}$$

Ecuațiile (3.4) și (3.5), transformate corespunzător, și ecuațiile (3.9)... ...(3.17) și (3.19) permit construirea schemei structurale din fig. 2. Prin transformări sau cu ajutorul relațiilor (**3.21**) și (**3.22**), se obține schema structurală din fig. 3.

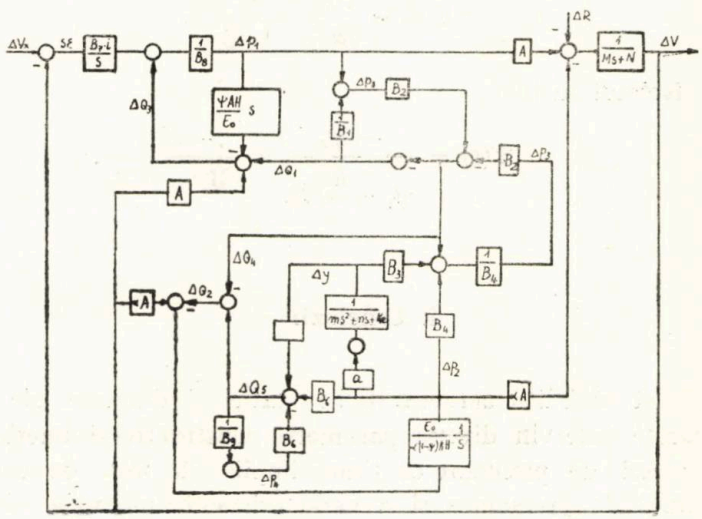


Fig. 2

Funcția de transfer a sistemului deschis în funcție de acțiunea de comandă (viteza palpatorului) este:

$$W(s) = \frac{\bar{\bar{v}}}{\bar{\bar{v}}_x} = \frac{k_v}{s} \cdot \frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_5}, \tag{3.23}$$

iar funcția de transfer a sistemului închis:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{k_v \mathfrak{P}_3}{s\mathfrak{P}_5 + k_v \mathfrak{P}_3}, \tag{3.24}$$

cu ecuația caracteristică:

$$s\mathfrak{P}_5 + k_v \mathfrak{P}_3 = 0. \tag{3.25}$$

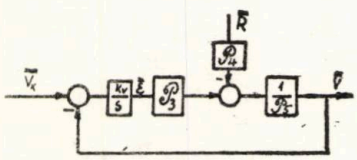


Fig. 3

Funcția de transfer datorită sarcinii rezultă din fig. 3. Pentru sistemul deschis,

$$Y(s) = \frac{\bar{\bar{v}}(s)}{\bar{\bar{R}}(s)} = \frac{-\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_5}, \tag{3.26}$$

iar pentru sistemul închis,

$$\Psi(s) = \frac{-\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_5 + \frac{k_v}{s}\mathfrak{P}_3} = \frac{-s\mathfrak{P}_4}{s\mathfrak{P}_5 + k_v \mathfrak{P}_3}. \tag{3.27}$$

4. Concluzii

a) Au fost stabilite caracteristicile statie și dinamice ale SHU, în expresiile cărora intervin diverși parametri constructivi și funcționali, ca și parametrii piesei de prelucrat conținuți implicit în forța de așchiere (variația adaosului de prelucrare și a caracteristicilor mecanice ale materialului) și în viteza de urmărire (proporțională cu panta profilului piesei). O

analiză teoretică a acestor caracteristici, prin variaţia succesivă a unor parametri, coroborată cu încercări experimentale ale maşinii, direct, în procesul de lucru, va permite găsirea căilor de îmbunătăţire a performanţelor, în speţă, a preciziei de prelucrare.

b) Analiza pe calculatorul analogic va completa informaţiile privind căile de optimizare a funcţionării strungului de copiat.

c) Analiza prezintă importanţă avînd în vedere variaţia în timp a caracteristicilor, ceea ce impune repuneri la punct periodice.

Primită la 5 iulie 1973

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Лещенко В. А. (ред.), *Гидравлический следящий привод*. Машиностроение, М., 1968.
2. Солодовников В. В. (ред.), *Теория автоматического регулирования*. Т. 1, Машиностроение, М., 1968.
3. Merritt H. E., *Hydraulic Control Systems*. John Wiley § Sons, Inc., New York — London — Sydney, 1967.

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES SERVOSYSTÈMES HYDRAULIQUES DES MACHINES-OUTILS DE COPIAGE D'APRÈS LE GABARIT

(Résumé)

Après quelques considérations sur l'utilisation de l'hydraulique dans la commande et la servocommande des machines, en général, et des machines-outils, en particulier, en soulignant la nécessité d'aborder le problème du point de vue de la théorie linéaire et nonlinéaire, tant par les constructeurs que par les utilisateurs de ces machines, les Auteurs font une analyse des caractéristiques statiques et dynamiques du servosystème hydraulique de la tour de copiage KDM 28/7-F. Les Auteurs se proposent, en partant de cette analyse, d'entreprendre une recherche de la tour dans le processus de copiage des pièces de roulements.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUȚOMAȚIZĂRI.

C.Z. 621.313.39

ASUPRA COMPORTĂRII DINAMICE A AUTODINELOR REGULATOARE DE TENSIUNE FUNCȚIONÎND ÎN GOL *)

DE

CORNELIU HUȚANU

1. Introducere

Autodina este o mașină specială [1] care poate fi utilizată în sistemele de reglaj automat, avînd aplicații imediate în acționările electrice care necesită un reglaj al vitezei.

Fiind generatorul care alimentează motorul de antrenare, proprietățile autodinei vor influența direct sistemul de acționare, cu atît mai mult cu cît constituie o mașină complexă care cuprinde atît regulatorul automat cît și amplificatorul de putere. Din acest motiv cunoașterea comportării lor dinamice este absolut necesară în vederea abordării regimurilor tranzitorii ale sistemelor de acționare ce conțin astfel de mașini.

2. Funcționarea dinamică ideală a autodinei

Se consideră că în mașina funcționînd în regim staționar ($\Omega = \Omega_s$, $U_c = U$) nu acționează cupluri parazite și că la funcționarea în gol fluxul face cu axa longitudinală unghiul β (fig. 1). Pentru început se consideră că pe statorul mașinii este dispusă numai înfășurarea de comandă și că regimul staționar este perturbat prin mărirea cu $\Delta U_c(t)$ a tensiunii de comandă, cu o variație oarecare în timp. În înfășurarea de comandă apare un curent $\Delta I_{cd}(t)$ și o solenație corespunzătoare

$$\Delta F_c(t) = \frac{\Delta U_c(t)}{a_c R_c} w_{cd}. \tag{1}$$

Considerînd că întreg fluxul produs de această înfășurare străbate întrefierul, acesta creează pe partea de c. a., în înfășurarea unei faze rotorice, o t. e. m. și un curent de compensare [1] proporțional (fig. 1 *c*):

*) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 2—4 iulie 1970.

(2) $$-\Delta I_{1d}(t) = c_2 \Delta F_c(t),$$

dirijat în sens invers curentului de comandă. Acest curent produce un cuplu încetinitor care acționează asupra rotorului :

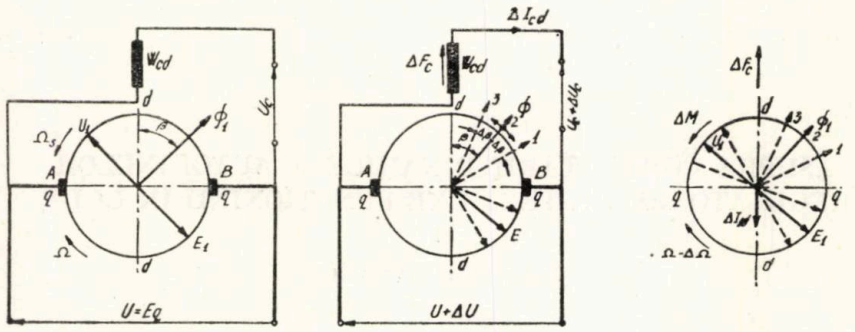


Fig. 1

(3) $$\Delta M(t) = \frac{3}{\Omega_s} E_1 \Delta I_{1d}(t) \sin \beta.$$

Drept urmare viteza rotorului se micșorează, antrenînd rotirea în sens direct a sistemului de fazori $\underline{U}_1$, $\underline{\Phi}$, $\underline{E}$, în sensul micșorării unghiului β. Componentele longitudinală și transversală ale fluxului devin :

(4) $$\Phi \cos [\beta - \Delta\beta(t)] = \Phi \cos \beta + \Phi \sin \beta \,.\, \Delta\beta(t) = \Phi_d + \Delta\Phi_d(t),$$

respectiv

(5) $$\Phi \sin [\beta - \Delta\beta(t)] = \Phi \sin \beta - \Phi \cos\beta \,.\, \Delta\beta(t) = \Phi_q - \Delta\Phi_q(t).$$

Ca urmare se micșorează componentele longitudinale ale t. e. m. (E_d și E_{1d}) și cresc cele transversale (E_q și E_{1q}), deci și tensiunea la periile AB :

(6) $$\Delta U(t) = \Delta E_q(t) = E \sin \beta \,.\, \Delta\beta(t) = c_1 E_1 \sin\beta \,.\, \Delta\beta(t), \text{ unde } c_1 = E/E_1.$$

La un moment dat, spre exemplu cînd fluxul se află în poziția *2* (fig. 1 *b* și 1 *c*), tensiunea la perii echilibrează tensiunea de comandă :

$$\Delta U(t) = \Delta U_c(t).$$

Pentru această poziție curentul în înfășurarea de comandă se anulează și deci și cuplul încetinitor. Însă, datorită inerției, viteza rotorului continuă a se micșora, fazorii $\underline{U}_1$, $\underline{\Phi}$ și $\underline{E}$ continuîndu-și mișcarea în sensul micșorării unghiului β, tensiunea la periile AB depășind tensiunea de comandă. Apare

un curent de sens invers în înfășurarea de comandă și un cuplu accelerator asupra rotorului care tinde să-l aducă în poziția *2*. În consecință viteza rotorului începe să crească și în momentul cînd acest cuplu devine suficient de mare pentru a echilibra cuplul dinamic

$$\Delta M(t) + J\frac{\mathrm{d}[\Delta\Omega(t)]}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7}$$

viteza rotorului devine egală cu viteza de sincronism iar unghiul β are valoarea minimă (poziția *3* — fig. 1 *b* și 1 *c*). În acest moment ΔU, ΔI_{cd} și ΔM au valorile maxime. Începe rotirea fazorilor în sens invers deoarece viteza unghiulară a rotorului depășește viteza de sincronism și fazorii trec de poziția *2*, tensiunea ΔU devenind mai mică decît ΔU_c. Apare un cuplu încetinitor și dacă sistemul nu ar prezenta pierderi fazorii s-ar opri în poziția *1*, simetrica poziției *3* în raport cu poziția cvasistaționară *2*, reîncepînd ciclul descris.

Pentru această situație ideală se poate stabili frecvența proprie a oscilațiilor libere ale rotorului autodinei. În adevăr, ținînd cont de (1), (2) și (6), relația (3) devine:

$$\Delta M(t) = \frac{3}{\Omega_s}\cdot\frac{w_{cd}}{a_c R_c} c_1 c_2 E_1^2 \sin^2\beta\,.\,\Delta\beta(t), \tag{8}$$

iar (7) se poate scrie:

$$\frac{3}{\Omega_s} c_1 c_2 E_1^2 \sin^2\beta \frac{w_{cd}}{a_c R_c}\Delta\beta(t) = -\frac{J}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}^2[\Delta\beta(t)]}{\mathrm{d}t^2},$$

unde $\Delta\beta(t)$ este exprimat în grade electrice.

În fine

$$\frac{\mathrm{d}^2[\Delta\beta(t)]}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\Omega_s}\cdot\frac{pc_1c_2}{J} E_1^2 \sin^2\beta \frac{w_{cd}}{a_c R_c}\Delta\beta(t) = 0. \tag{9}$$

Ecuația (9) descrie o mișcare periodică neamortizată cu soluția de forma

$$\Delta\beta(t) = \mathcal{R}e(\Delta B e^{j\omega_0 t}). \tag{10}$$

Ținînd cont de (10) și de faptul că $E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} w_f p \Omega_s \Phi_1$, (9) se scrie:

$$-\omega_0^2 + \frac{3}{2} c_1 c_2 p^3 \Omega_s^2 w_1^2 \Phi_1^2 \sin^2\beta \frac{w_{cd}}{a_c R_c}\cdot\frac{1}{J} = 0,$$

de unde rezultă frecvența oscilațiilor proprii

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{c_1 c_2 p^3 \Omega_s^2 w_f^2 \Phi_1^2 \sin^2\beta . w_{cd}}{a_c R_c J}}. \tag{11}$$

Relația (11) permite obținerea unor indicații privind comportarea dinamică a autodinelor de acest tip. Astfel, pentru a obține o viteză de răspuns cît mai mare este necesar a avea o înfășurare de comandă cu raportul $w_{cd}/a_c R_c$ cît mai mare, un flux de excitație cît mai mare, un număr de poli și un moment de inerție cît mai mici. De asemenea, se observă că frecvența proprie, deci și viteza de răspuns, depinde de poziția în care se află fluxul în raport cu periile, micșorîndu-se pentru valori mari ale tensiunii la borne.

3. Funcționarea dinamică reală a autodinei

În realitate în autodină mai acționează, în afară de cele două cupluri, factori amortizanți și pierderi. Astfel, datorită modificării componentei longitudinale a fluxului, în înfășurarea de comandă se va induce o t. e. m. Această înfășurare fiind practic scurtcircuitată prin colector, prin ea va circula un curent de sens contrar curentului de comandă, producînd în rotor un curent de compensare și un cuplu ce va tinde să amortizeze mișcarea (fig. 2).

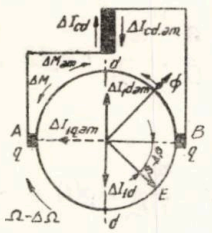


Fig. 2

Practic autodinele mai au pe semipoli și alte înfășurări [1], [3] simetrice care acționează după cele două axe (de excitație, de alunecare și de compensare a frecărilor), constituind contururi închise în care se induc curenți amortizanți analog ca în înfășurarea de comandă. Deci pe axa longitudinală va acționa un curent de compensare amortizant:

$$\Delta I_{1d\text{am}}(t) = c_2 K_d \Delta\Phi_d(t) = c_2 K_d \Phi \sin\beta \cdot \Delta\beta(t) = c_1 c_2 c_e K_d E_1 \sin\beta \cdot \Delta\beta(t),$$

iar pe axa transversală

$$\Delta I_{1q\text{am}}(t) = c_2 K_q \Delta\Phi_q(t) = c_2 K_q \Phi \cos\beta \cdot \Delta\beta(t) = c_1 c_2 c_e K_q E_1 \cos\beta \cdot \Delta\beta(t).$$

Constantele K_d și K_q depind de parametrii înfășurărilor statorice dispuse după cele două axe iar $c_e = \Phi/E$.

Deci, cuplul amortizant produs în mașină va fi:

$$\Delta M_{\text{am}}(t) = \frac{8}{\Omega_s} c_1 c_2 c_e E_1^2 (K_d \sin^2\beta + K_q \cos^2\beta)\Delta\beta(t). \tag{12}$$

Avînd în vedere relația (8) cuplul rezultant din autodină va fi:

$$\Delta M_r(t) = \Delta M_{am}(t) - \Delta M(t) = \frac{3}{\Omega_s} c_1 c_2 c_e E_1^2 (K_d \sin^2\beta + K_q \cos^2\beta - \frac{w_{cd}}{a_c R_c} \sin^2\beta)\Delta\beta(t). \tag{13}$$

Pînă acum s-a considerat că întreg fluxul produs de înfășurări străbate întrefierul. În realitate fluxurile de dispersie precum și căderile de tensiune diminuează efectul amortizant amintit [2]. Cu toate acestea concluziile ce se pot stabili cu privire la regimul tranzitoriu al autodinei reglatoare de tensiune funcționînd în gol se păstrează calitativ și anume:

1. Pentru o poziție bine determinată a fluxului în spațiu, deci pentru un anumit unghi β, cuplul rezultant depinde direct de valoarea rezistenței pe spiră a înfășurării de comandă, existînd posibilitatea ca la valori foarte mici ale acesteia mișcarea rotorului să devină neamortizată.

2. Relația (13) permite să se stabilească cea mai dezavantajoasă poziție a fluxului din punct de vedere al stabilității. Astfel, pentru valori ale lui β apropiate de zero cuplul produs de înfășurarea de comandă este foarte mic, rezultînd un cuplu amortizant bine definit:

$$\Delta M_{r(\beta=0)}(t) = \frac{3}{\Omega_s} c_1 c_2 c_e K_q E_1^2 \Delta\beta(t). \tag{14}$$

Dimpotrivă, pentru valori apropiate de 90° termenul amortizant scade, cuplul rezultant devenind:

$$\Delta M_{r(\beta=90°)}(t) = \frac{3}{\Omega_s} c_1 c_2 E_1^2 (c_e K_d - \frac{w_{cd}}{a_c R_c})\Delta\beta(t). \tag{15}$$

În funcție de parametrii înfășurărilor statorice care acționează pe axa longitudinală în acest caz se poate ajunge la o funcționare instabilă.

4. Verificări experimentale

Concluziile teoretice din paragrafele precedente au fost verificate pe o autodină experimentală [3]. Înfășurarea de comandă a mașinii a fost prevăzută cu posibilitatea de comutare a legăturilor între bobinele de pe semipoli. Se pot obține două conexiuni distincte: serie (fig. 3 *a*) și serie -paralel (fig. 3 *b*). În primul caz rezistența înfășurării este de 15,2 Ω iar în al doilea 3,8 Ω, rezultînd pentru raportul $w_{cd}/a_c R_c$ valorile 105, respectiv 210. Pentru a se putea evidenția efectul parametrilor înfășurării de comandă

s-a folosit conexiunea serie-paralel și s-au introdus rezistențe suplimentare în serie. Pentru o variație treaptă de 6 V aplicată înfășurării de comandă s-a oscilografiat răspunsul autodinei pentru trei poziții ale fluxului: $\beta = 90°$ (0 V), $\beta = 63°$ (30 V) și $\beta = 34°40'$ (50 V), tensiunea maximă dată de autodină fiind de 66,7 V.

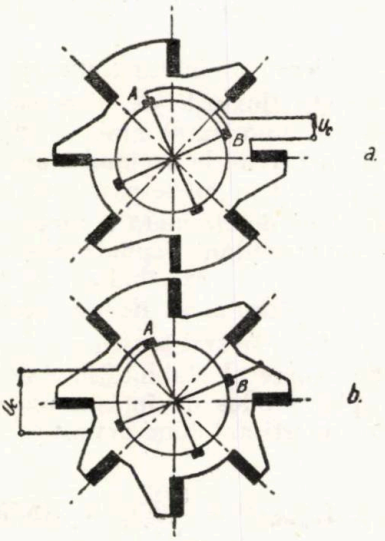


Fig. 3

a) Răspunsul autodinei, pentru cazul cînd perturbația se produce în poziția $\beta = 90°$, este reprezentat în oscilogramele din fig. 4. Pentru conexiunea serie-paralel mașina se comportă instabil, procesul neputînd fi înregistrat. Apoi, pentru aceeași conexiune s-a modificat rezistența totală a înfășurării prin introducerea de rezistențe etalonate. Astfel, pentru o rezistență suplimentară de 5,4 Ω ($w_{cd}/a_c R_c = 123$) procesul devine oscilant întreținut, autodina funcționînd la limita de stabilitate. În fig. 4 *a* sînt reprezentate oscilogramele tensiunii la borne și curentului în înfășurarea de comandă. Pentru o rezistență suplimentară de 11,5 Ω ($w_{cd}/a_c R_c = 83{,}5$) răspunsul autodinei este oscilant amortizat și este reprezentat în fig. 4 *b*. În fig. 4 *c* este reprezentat răspunsul pentru cazul cînd se mărește rezistența suplimentară față de situația precedentă cu 5 Ω ($w_{cd}/a_c R_c = 69{,}5$).

b) Pentru cazul cînd perturbația se produce la $\beta = 63°$, conectînd înfășurarea de comandă după schema din fig. 3 *a*, mașina funcționează încă instabil, dar prin introducerea unei rezistențe de numai 2,5 Ω procesul devine stabil, răspunsul fiind oscilant amortizat (fig. 5 *a*). Pentru a dispune de un criteriu de comparație cu cazul precedent s-au înregistrat răspunsurile și pentru rezistențele suplimentare de 5,4 Ω (fig. 5 *b*) și 11,5 Ω (fig. 5 *c*).

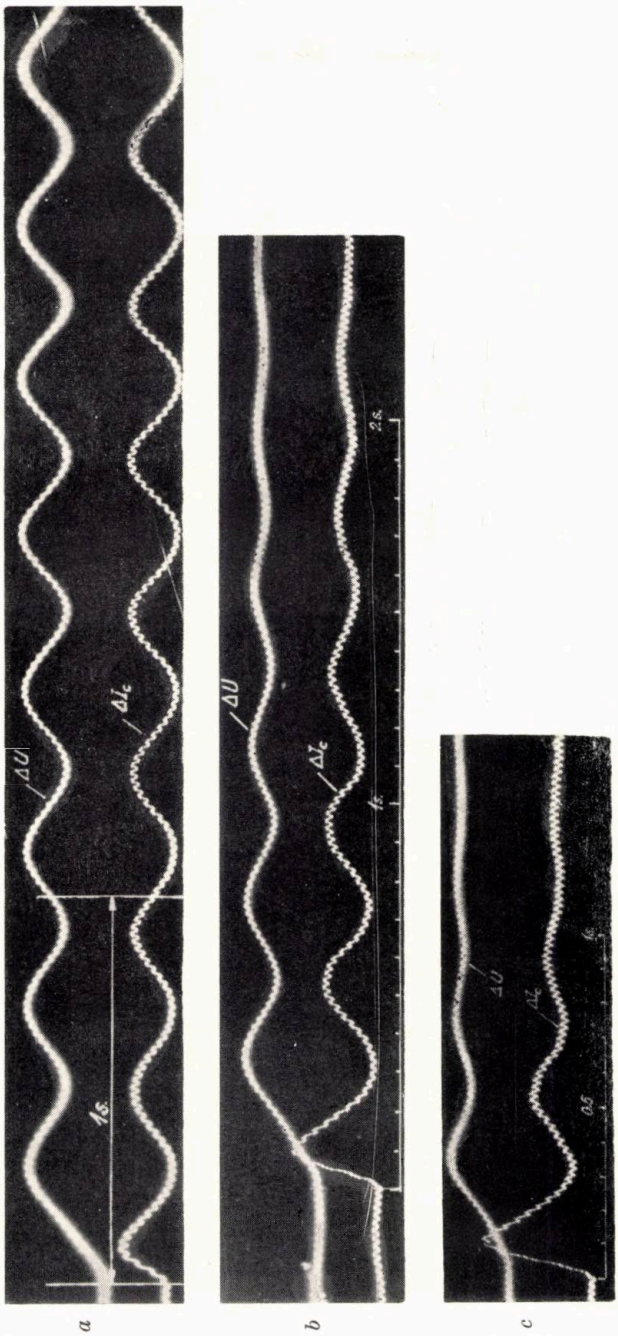


Fig. 4

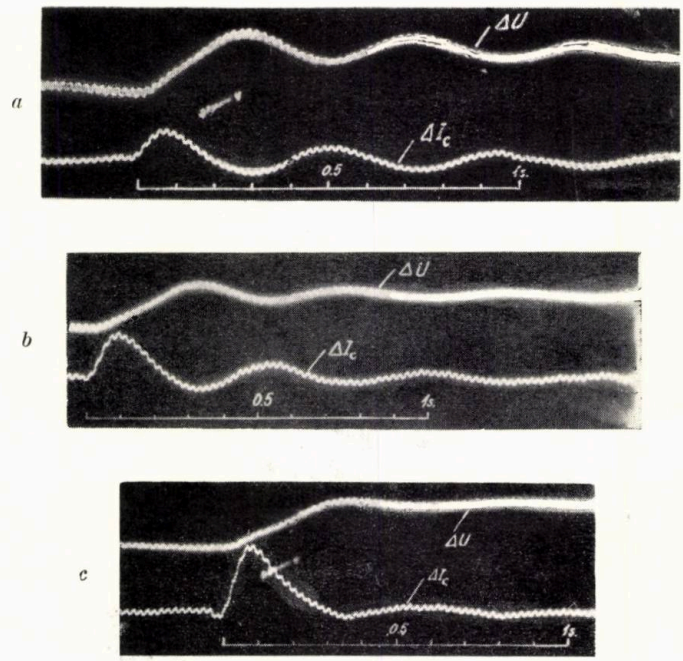


Fig. 5

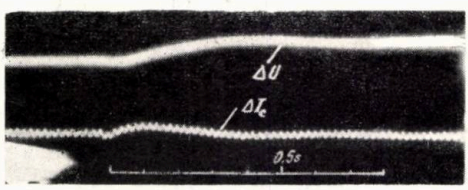


Fig. 6

c) În poziția ultimă ($U = 55$ V) autodina funcționează stabil, procesul avînd un caracter puternic amortizat chiar pentru conexiunea serie-paralel fără rezistență suplimentară (fig. 6), la care pentru pozițiile fluxului corespunzătoare situațiilor din a) și b) se obțin regimuri instabile.

5. Concluzii

Studiul teoretic și experimental al comportării autodinelor regulatoare de tensiune permite desprinderea următoarelor concluzii:

1. Cea mai dezavantajoasă poziție a fluxului, din punct de vedere al stabilității, este situată în jurul valorii $\beta = 90°$. Cu cît procesul tranzitoriu are loc spre valori mai mari ale tensiunii la borne regimul de funcționare al autodinei este mai stabil.

2. Pentru o construcție dată a autodinei rezistența din circuitul înfășurării de comandă influențează direct procesul tranzitoriu, existînd o anumită valoare sub care procesul devine instabil.

Rezultă o concluzie cu valoare practică pentru aceste mașini și anume: este suficient ca autodina regulatoare de tensiune să funcționeze stabil la $\beta = 90°$, regimul fiind sigur stabil în restul domeniului de reglaj. De asemenea, în cazul cînd condițiile calitative (precizia) impuse reglajului permit, chiar pentru o funcționare instabilă în jurul poziției $\beta = 90°$, prin mărirea corespunzătoare a rezistenței circuitului de comandă se poate restrînge sau chiar elimina domeniul de instabilitate.

Notații

U_1 — tensiunea de alimentare pe fază,
Φ, Φ_d, Φ_q — fluxul de excitație, respectiv componentele sale longitudinală și transversală,
Φ_1 — fundamentala fluxului de excitație,
E, E_d, E_q — t. e. m. de rotație, respectiv componentele sale longitudinală și transversală,
E_1, E_{1d}, E_{1d} — fundamentala t. e. m., respectiv componentele sale longitudinală și transversală,
U_c — tensiunea de comandă,
U — tensiunea la periile transversale,
Ω_s — viteza unghiulară sincronă,
Ω — viteza unghiulară a rotorului,
ω_0 — pulsația proprie,
a_c, w_{cd}, R_c — numărul de căi de curent, numărul de spire și rezistența înfășurării de comandă,
w_f — numărul efectiv de spire al înfășurării unei faze,
p — numărul de perechi de poli.

Primită la 6 octombrie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice
și automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Benedikt O., *Die neue elektrische Maschine „Autodyne"*. Budapest, 1957.
2. Benedikt O., *Über die Regelgenauigkeit der Autodyne*. E. und M., **28**, *6*, 237 (1961)
3. Huţanu C., *Încercările experimentale ale unei autodine*. Electrotehnica, **17**, *10*, 373 (1969)

SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES AUTODYNES RÉGULATRICES DE TENSION AU FONCTIONNEMENT À VIDE

(Résumé)

On étudie le fonctionnement transitoire des autodynes régulatrices de tension sans charge et on aboutit à des conclusions concernant la stabilité des ces machines.

Les vérifications réalisées à l'aide d'une autodyne expérimentale confirment ces conclusions.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

D. K. 621.313.222 : 621.3.014.33 : 621.316.719

BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER IMPULSENREGELUNG DER BREMSUNG VON GLEICHSTROMREIHENSCHLUßMASCHINEN

VON

MIRCEA OPRIŞOR, VIRGIL MOGA und ADRIAN CIUTĂ

Die Vorteile der Impulsenregelung von Gleichstrommaschinen und besonders der Reihenschlußmaschine, zu welchen der höhere Wirkungsgrad, die Feinheit der Regelung, die Leichtigkeit der Automatisierung, die Wirtschaftlichkeit usf., sowie beim Bremsen die Möglichkeit der Energierückgewinnung bis zum Anhalten gehören, haben zur Entwicklung einer Anzahl Lösungen in dieser Richtung geführt.

In einer früheren Arbeit [3] wurden die Möglichkeiten der Regelung in der Motorenbetriebsart mittels eines direkten Gleichspannungsumrichters mit unabhängigen Lade- und Löschkreisen angegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten desselben Gleichstromstellers und der Maschine beim Bremsen besprochen; aus diesem Anlaß wurde die Schaltung aus Abb. 1 entwickelt und ausgearbeitet. Diese ermöglicht die Regelung der Reihenschlußmaschine MT, sowohl beim Motorenbetrieb als auch bei Arbeitsweisen des Nutz- oder Widerstandsbremsens.

In Abb. 2 sind die Oszillogramme der Spannungen (I. Quadrant) und der Ströme (IV. Quadrant) an den Hauptelementen des Kraftkreises dargestellt. Der Kommutierungsvorgang, welcher der Motorenbetriebsart gleichläuft, wurde nicht mehr im einzelnen analysiert. Gegenüber der Motorenbetriebsart beobachtet man eine Verringerung der von der Kommutierung bedingten Schwingungen. Dann wird bei einer Kurzschlußdauer t_a, welche der Halbperiode der Umrichterkommutierung entspricht, und zur Rückgewinnung in Impulsen die in die Quellenspannung eingeführte Wechselstromkomponente verringert. Dies läßt sich durch das Eisenvolumen, bzw. die Induktivität erklären, welche bei der als Generator arbeitenden MT kleiner sind, während der Filterkondensator derselbe wie bei der Motorenbetriebsart ist.

Dank der Voranerregung seitens eines in Drehstrombrückengeschalteten Gleichrichters ohne Glättungsdrossel werden unter bestimmten Bedingungen die Oberschwingungen der Spannung U_{es} wiedergefunden, sowohl

in der Spannung an den Klemmen des Motors U_M und in der Spannung an der Blockungsdiode der Quelle U_{D_0}, wie auch im Strom durch den Motor I_M, bzw. im Rekuperativstrom I_R.

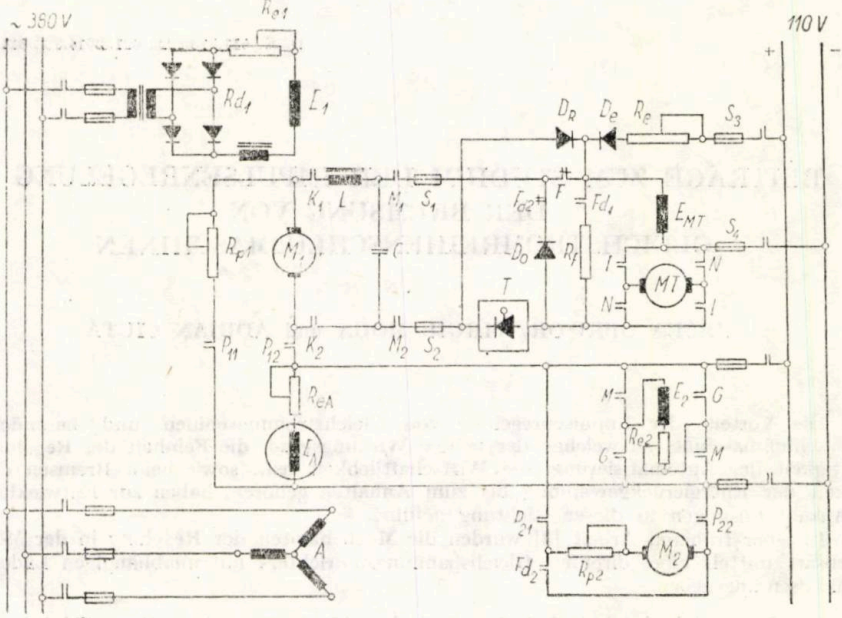


Abb. 1

Die relativ hohe Leistung der Quelle M_1 und demgemäß die niedrige Zeitkonstante des Rekuperativkreises bedingen es, daß der Strom I_R das Bild kurzdauernder Impulse[1]) aufweist. Aus diesem Grunde kann die selbsterregte Bremsung nicht einsetzen; es ist eine Verlängerung der Fremderregung für die ganze Dauer des Nutzbremsens nötig. Man erhält auf diese Weise eine kompoundierte Mischbremsung, welche einige Eigentümlichkeiten gegenüber der selbsterregten Bremsung aufweist.

In Falle der Speisequellenspannung $U_R = 200$ V ($= 91\%\ U_{RN}$), ergeben sich in den Kurzschlußperioden der Maschine, den Perioden, in welchen der Hauptthyristor leitet, $U_M = 0$, $U_{D_0} = U_R$, wobei der Ankerstrom I_M stark anwächst. Gleichzeitig bedingt die Kompoundierung auf der Erregungswicklung E die Aufhebung des Fremderregerstromes. Im ersten Zeitabschnitt nach der Unterbrechung des Kurzschlußes ergibt sich $U_M = U_R$ und $U_{D_0} = 0$ (die Blockungsdiode der Quelle wird eingeschaltet);

[1]) Die Versuche, die Zeitkonstante durch Reiheneinschaltung von Widerständen zu vergrößern, führten zu einer Verschlechterung der Stabilität des Rekuperativbetriebes.

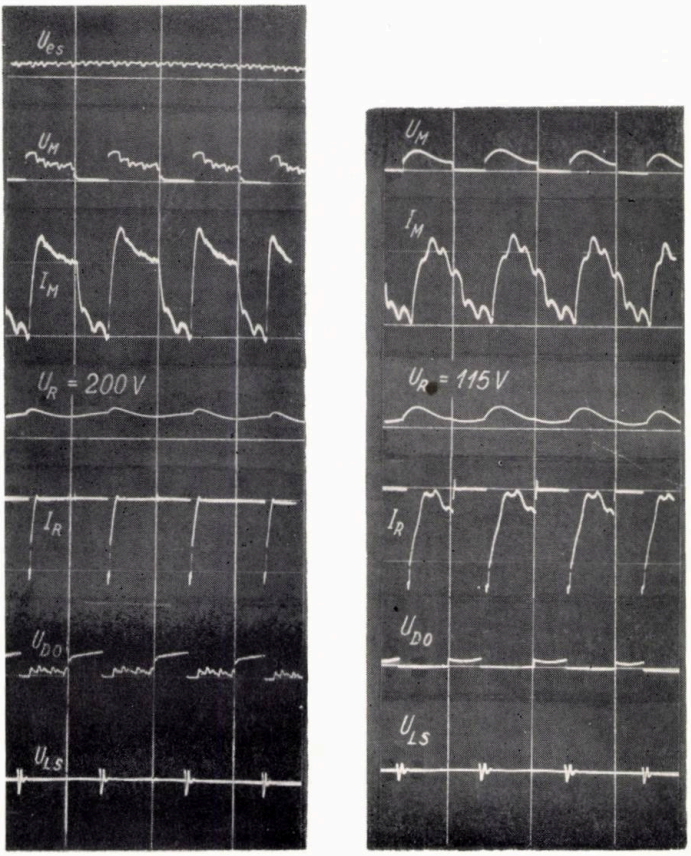


Abb. 2

damit stabilisiert sich der kurzdauernde Rekuperativstrom. Nach dem Auslöschen der Diode D_0 folgt ein zweiter Zeitraum innerhalb welchem der Ankerkreis unterbrochen bleibt ($I_M = 0$, $I_R = 0$). Das Oszillogramm des Stromes I_M, das an dem gemeinsamen Kreis der Ströme gesonderter Erregung und Selbsterregung abgenommen wurde, zeigt die Wiederherstellung des ersteren dieser Ströme an [2]). An den Klemmen der Maschine wird die von der Fremderregung induzierte Spannung verzeichnet; an den Klemmen der Diode D_0, die Differenz zwischen dieser Spannung und U_R. Praktisch muß sich beim Fehlen der Fremderregung, nach Aufhebung von I_R bzw. I_M wieder $U_M = 0$ und $U_{D_0} = U_R$ einstellen; diese Lage erscheint hier nur nach Wiedereinstellung der Kurzschlußschaltung in dem auf die Kommutierung folgenden Zeitabschnitt.

Es muß hervorgehaben werden, daß die an die Diode D_0 angelegte Spannung das Wiedereinschalten derselben nach Wiederherstellung der Fremderregung nicht gestattet. Dies läßt sich durch das für U_{es} gewählte Niveau erklären, welches beim Bremsen mit gemischter Erregung den Nennstrom I_{MN} für die Nenngeschwindigkeit und die Nennleistung bestimmt, welche dem Motorenbetrieb entspricht. Um die Kontinuität von I_M und I_R zu gewährleisten, ist eine Änderung der Spannungsamplitude U_{es} möglich oder es wird eine Erhöhung der Kommutierungsfrequenz des Umrichters, bzw. die Einführung einer Rückkopplung nach I_M oder I_R bei Steuerung des Umrichters nötig.

Die Verringerung der Speisespannung bei $U_R = 115$ V ($= 52\% U_{RN}$) unter Annahme desselben Bremsmomentes bedingt es, daß der Strom I_R die Ausgangsform des Impulses verzeichnet, wonach er, ohne annulliert zu werden, von neuem dank der Fremderregung ansteigt. Der Strom I_M stellt eine der normalen, oszillierend-ununterbrochenen Variation angenäherte Form vor, einfach dadurch, daß seine Steigerungsgeschwindigkeit nach Kurzschließen der Maschine ungefähr gleich ist der Steigerungsgeschwindigkeit des Gesamterregungstromes im zweiten Teile des Zeitraumes, in welchem die Maschine nicht im Kurzschluß geschaltet ist. Die Kontinuität des Stromes I_R bedingt es, daß die Diode D_0 im ganzen Zeitraum leitet, in welchem die Maschine ins Netz abgibt ($U_{D_0} = 0$), ein Zeitraum in welchem $U_M = U_R$.

Man stellt fest, daß die Verringerung der Spannungen U_R, bzw. U_{Ls} die Stabilität der Kommutierung nicht verschlechtert, die bei einer doppelt so großen Spannung gegenüber U_R entsteht.

Um das Betriebsverhalten der Maschine zu analysieren, wurden experimentell die Kennlinien für das Anhaltebremsen bei $I_R = K$ (Abb. 3, 4) wie auch für das Erhaltungsbremsen bei $n = K$ (Abb. 5, 6) gezogen.

Die äussern Kennlinien von MT beim Anhaltebremsbetrieb (Abb. 3) zeigen, daß für einen vorgeschriebenen Bremsmoment ($I_M = K$) das Ansteigen des Rückgewinnungsstromes, also das Anwachsen der Wirtschaft-

[2]) Für die gegebene Zeitkonstante des Stromes der Fremderregung hält das Ansteigen der Kommutierungsfrequenz diesen Kreis ständig blockiert.

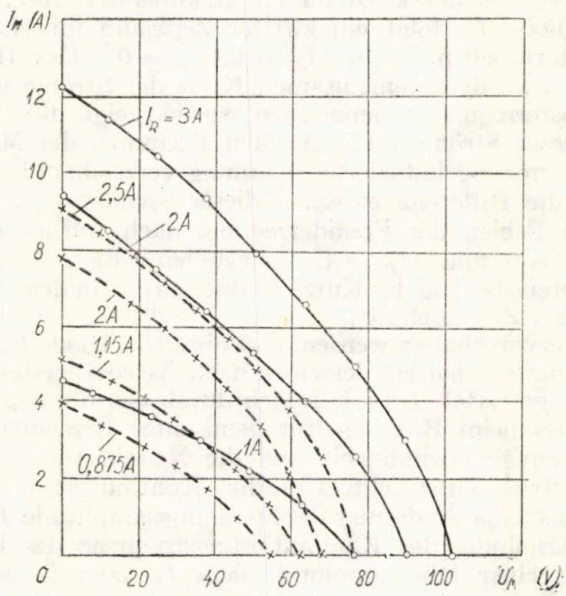

I_M (A)
12
10
8
6
4
2
0
20
40
60
80
100
U_M (V)
I_R = 3A
2,5A
2A
2A
1,15A
1A
0,875A

Abb. 3

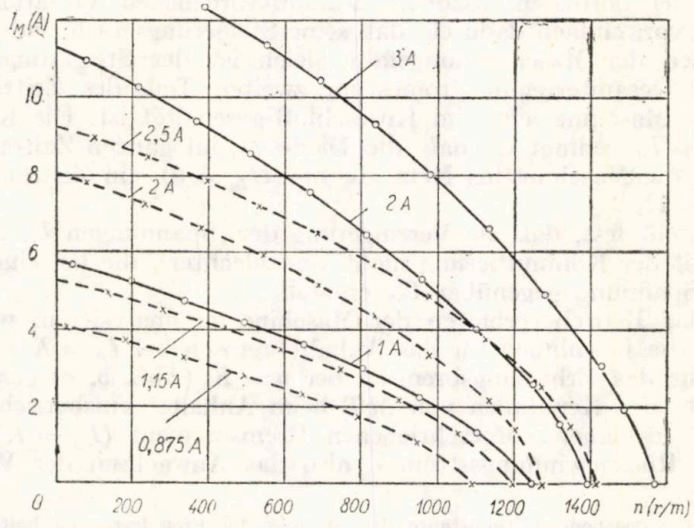

I_M (A)
10
8
6
4
2
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
n (r/m)
3A
2,5A
2A
2A
1A
1,15A
0,875A

Abb. 4

lichkeit des Bremsens, gleichzeitig mit dem Ansteigen der U_M möglich sind. Da letzteres durch die Verringerung der Dauer des Kurzschließens von MT erreicht wird ergibt sich, daß die Wirtschaftlichkeit in gleichem Masse mit der Geschwindigkeit n der Maschine (Abb. 4) ansteigt.

Im umgekehrten Sinn ist die Erhaltung des Grades der Wirtschaftlichkeit $I_R = K$ bei Verringerung der Maschinengeschwindigkeit (Abb. 5) möglich, wenn man gleichzeitig die Spannung U_M durch Verlängerung der Dauer des Kurzschließens t_a, bzw. die Erhöhung des Mittelwertes des Stromes I_M verringert. Eine hohe Wirtschaftlichkeit (Kurve $I_R = 3$ A, Abb. 4) kann bis zum Anhalten nur bei kurzdauerndem Betrieb bei Ankerströmen über dem Nennwert I_{MN} unterhalten werden.

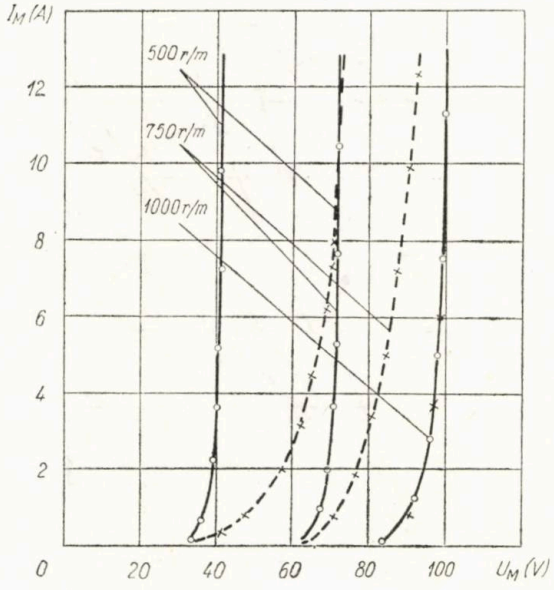


Abb. 5

Die Verringerung der Speisespannung, z. B. Reihenschaltung von zwei gleichartigen Maschinen MT, ergibt ein Ansteigen des Stromes I_R sowie der Wirtschaftlichkeit für dasselbe U_M und I_M (die Kurven 2 A mit ununterbrochener Linie und 2,5 A mit punktierter Linie, Abb. 3). Für dieselbe Bremsbelastung ($I_M = K$) und dieselbe Wirtschaftlichkeit ($I_R = K$), wächst die Spannung U_M gleichzeitig mit U_R; dies bedingt eine Verschlechterung der Stabilität; gleichzeitig ergibt sich auch ein Ansteigen der Geschwindigkeit, wobei die Wirksamkeit des Bremsens verringert wird

Die äußern Kennlinien der MT in der Betriebsweise des Nutzbremsens zur Erhaltung ($n = K$), die in Abb. 5 wiedergegeben sind, zeigen an, daß die Regelung der Kurzschließungsdauer der MT eine von U_M praktisch unabhängige Veränderung von I_M bedingt. Die Verringerung der Speisespannung bedingt ein Anwachsen von U_M für dieselbe gegebene Geschwindigkeit. Dieses Anwachsen ist umso kleiner, je höher die Geschwindigkeit ist und wird Null (im vorliegenden Fall) bei $n = 75\% n_N$. Die Wirtschaftlichkeit der Rückgewinnung wächst gleichzeitig mit I_M bzw. mit n. Dieses Anwachsen wird von der Verkleinerung der Speisespannung verstärkt (Abb. 6). Umgekehrt kann ein Steigen der Speisespannung ein Außsteigen aus dem Nutzbetrieb bedingen, wenn die Dauer der Kurzschließung bzw. der Strom I_M genügend groß, die Geschwindigkeit genügend niedrig sind.

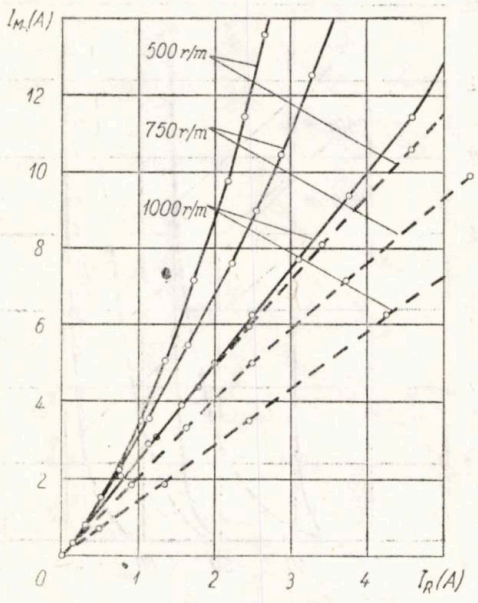


Abb. 6

In Abb. 7 sind die Oszillogramme der Spannungen und Ströme eingetragen, die dem Widerstandbremsen mit der gegebenen Schaltung entsprechen. Man stellt fest, daß die Vorgänge viel langsamer verlaufen; dies sichert sogar bei niedrigen Kommutierungsfrequenzen (50 Hz) die Kontinuität des Motorenstromes I_M. Andererseits ist entsprechend dem relativ niedrigen Wert des Bremswiderstandes $R = (1 - a) R_F$, wo $a = ft_a$ die relative Kurzschließungsdauer bedeutet, die Klemmenspannung des Motors U_M niedrig, während der Strom I_M entsprechend angestiegen ist. In dieser Hinsicht ist das Widerstandsbremsen viel wirksamer.

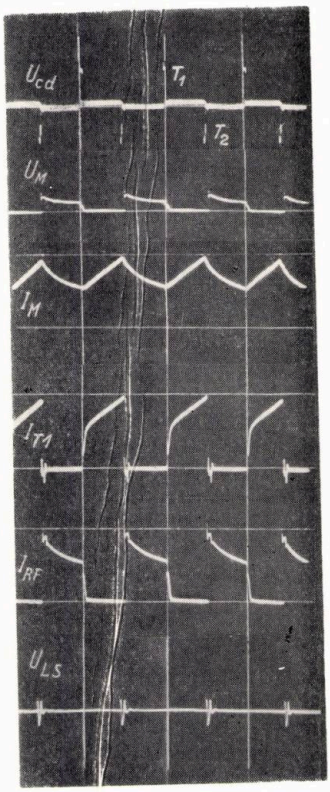


Abb. 7

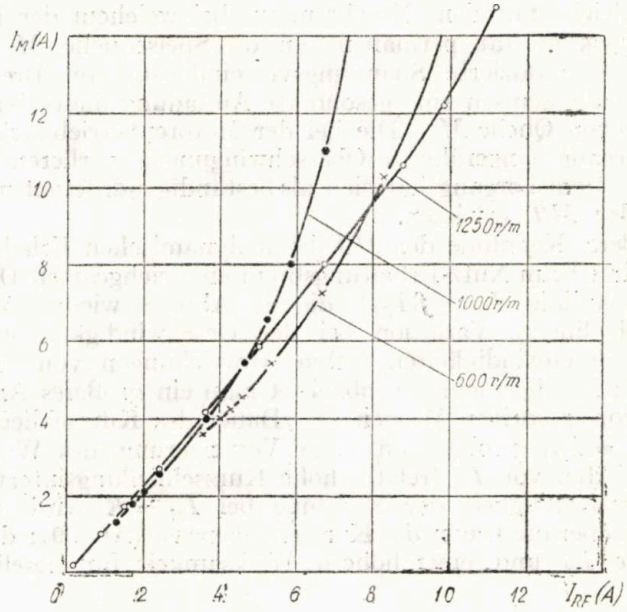

I_M(A)
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
I_{RF}(A)
1250 r/m
1000 r/m
600 r/m

Abb. 8

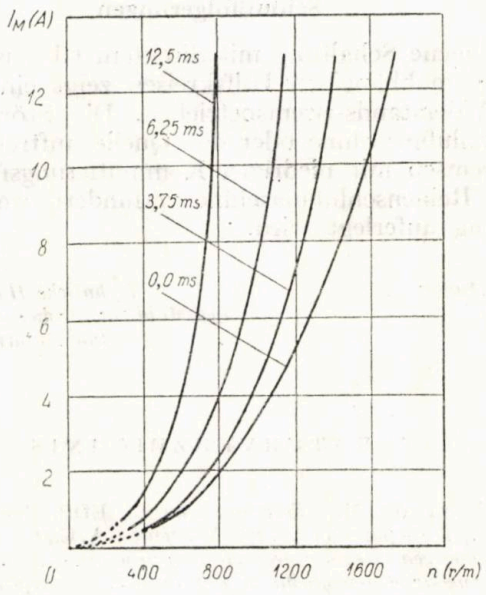

I_M(A)
12
10
8
6
4
2
0
400
800
1200
1600
n (r/m)
12,5 ms
6,25 ms
3,75 ms
0,0 ms

Abb. 9

In Vergleiche mit dem Nutzbremsen, bei welchem der Ladekreis der Kommutierungskapazität permanent an die Speisequelle M_1 angeschloßen ist, bedingt die reduzierte Spannungsverminderung am Bremswiderstand beim Widerstandsbremsen eine gesonderte Aufladung dieses Kreises (eigentlich von derselben Quelle M_1). Die bei der Motorenbetriebsweise vom Kommutierungsvorgang eingeführten Oberschwingungen verlieren hier an Bedeutung. Der Bremsvorgang hat sich als beständig indifferent zur Kurzschließungsdauer der MT erwiesen.

Die äußere Kennlinie der MT beim dynamischen Erhaltungsbremsen ist der Kennlinie beim Nutz-Erhaltungsbremsen gleichgeartet. Die Eintritts—Austritts-Kennlinie $I_M = f(I_{RF})$, die in Abb. 8 wiedergegeben ist, hat eine praktisch lineare Variation bei der Geschwindigkeit $n = 100\% \, n_N$. Bei kleinern Geschwindigkeiten treten Abweichungen von dieser linearen Variation auf; im allgemeinen beobachtet man ein größeres Anwachsen von I_{RF} bei I_M von niedrigen Werten (die Dauer des Kurzschließens nahe bei Null, wo $I_{RF} = I_M$) gefolgt von einer Verringerung des Wertes von I_{RF} bei höhern Werten von I_M (relativ hohe Kurzschließungsintervalle).

Die Geschwindigkeit der Maschine bei $I_M = K$ wird umso geringer ausfallen, je größer die Dauer des Kurzschließens ist (Abb. 9); dies entspricht einem Strome I_M und einer höhern Wirksamkeit für dieselbe Geschwindigkeit n.

Schlußfolgerungen

Die vorgeschlagene Schaltung mit direktem Gleichstromumrichter mit von der Belastung unabhängigen Hilfskreisen zeigt ein stabiles Verhalten bei Nutz- oder Widerstands-Bremsbetrieben. Die Störungen, die in dem Kreis der Reihenschlußmaschine oder der Quelle auftreten, werden verringert. Beim Nutzbremsen mit niedrigen Kommutierungsfrequenzen wird die Selbsterregung der Reihenschlußmaschine verhindert, wobei eine kompoundierte Mischerregung auferlegt wird.

Eingegangen am 29. August 1972

Technische Hochschule, Jassy
Lehrstuhl für Andwendungen der Elektrizität und Autormatisierung

LITERATURVERZEICHNIS

1. Cantemir L., Oprişor M., *Tracţiune electrică*. EDP, Buc., 1971.
2. Некрасов В. И., Гаврилов Г. Н., Мазнев А. С., *Об импульсном регулировании процесса электрического торможения низковольтного тягового электропривода с автономным питанием*. Электротехника, **41**, 2, 33—35 (1970).

3. Oprișor M., Diaconescu M., Moga V., *Über Impulsregelung des Gleichstromreihenschlussmotors.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVIII (XXII)**, *3—4*, 157—165 (1972).
4. Розенфельд В. Е. и. др., *Тиристорное управление электрическим подвижным составом постоянного тока.* Изд. „Транспорт", М., 1970.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL REGLĂRII ÎN IMPULSURI A FRÎNĂRII MAȘINII SERIE DE CURENT CONTINUU

(Rezumat)

Se studiază regimurile de frînare recuperativă la curent de recuperare constant și la viteză constantă. Este analizată influența variației tensiunii sursei de alimentare în cele două cazuri. De asemenea este studiat regimul de frînare dinamică la viteză constantă. Reglare este realizată prin intermediul unui convertizor direct de tensiune continuă cu circuite auxiliare independente față de sarcină.

Analiza comportării în funcționare permite să se deducă avantajele soluției propuse

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 1—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUȚOMAȚIZĂRI.

C. Z. 621.316.935 ; 621.317.333.82

INFLUENȚA BOBINEI DE STINGERE DIN NEUTRUL TRANSFORMATORULUI ASUPRA SOLICITĂRILOR IZOLAȚIEI ÎNFĂȘURĂRILOR ACESTUIA LA APLICAREA TENSIUNII DE IMPULS *)

DE

N. GAVRILAȘ, RODICA OLÁH și MIRCEA GUȘĂ

1. Introducere

Într-o serie de lucrări [1]...[4] s-au studiat fenomenele care au loc în înfășurările transformatorului supus la tensiunea de impuls, luîndu-se în considerare schema echivalentă a unei bobine cilindrice într-un singur strat, avînd sfîrșitul înfășurării izolat sau legat la pămînt. În [5] se studiază și cazul în care sfîrșitul bobinei este legat la pămînt prin circuite cu parametri concentrați, inclusiv prin bobină de stingere, plecîndu-se însă de la o schemă echivalentă cu parametri concentrați a înfășurării transformatorului. Problema este analizată în [6] pe baza unei scheme echivalente cu parametri uniform repartizați, însă fără a se lua în considerare inductanța înfășurării corespunzătoare fluxului comun prin miezul de oțel.

În cele ce urmează se studiază influența bobinei de stingere din neutrul transformatorului, plecîndu-se de la schemele echivalente cu parametri uniform repartizați propuse de Wagner [1] și Heller, Hlávka, Veverka [3], cu considerarea și a inductanței datorite fluxului comun.

2. Considerarea schemei echivalente propuse de Wagner

Schema echivalentă propusă de Wagner (fig. 1) conține: L — inductanța proprie a înfășurării, C — capacitatea față de pămînt a înfășurării, K — capacitatea între spirele înfășurării, toți parametrii fiind considerați pe unitatea de lungime axială (l) a înfășurării.

*) Prezentată la sesiunea științifică jubiliară „60 de ani de învățămînt electrotehnic în Iași", 21—23 decembrie 1972.

Se mai ia în considerare şi inductanţa L_0 a înfăşurării (de asemenea raportată la mărimea l), corespunzînd fluxului comun prin miez, pe care W a g n e r a neglijat-o.

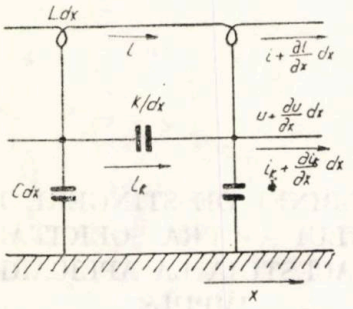


Fig. 1

Considerînd schema echivalentă din fig. 1, se pot scrie, pentru un element dx din lungimea axială a înfăşurării, următoarele ecuaţii integro-diferenţiale cu derivate parţiale:

$$(1) \qquad -\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{L_0}{l}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l i\,dx,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial(i + i_k)}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (3) \quad i_k = -K\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

din care, prin eliminarea curenţilor, rezultă ecuaţia:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + LK\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0,$$

sau în mărimi operaţionale (transformarea W a g n e r - C a r s o n),

$$(5) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} - LCp^2U + LKp^2\frac{d^2U}{dx^2} = 0,$$

unde U reprezintă transformata semnalului u.

Soluţia ultimei ecuaţii poate fi scrisă sub forma:

$$(6) \qquad U(x, p) = A\exp(\gamma x) + B\exp(-\gamma x),$$

unde

$$(7) \qquad \gamma = \frac{p\sqrt{LC}}{\sqrt{1 + LKp^2}},$$

iar A și B sînt constante de integrare care pot fi determinate din condițiile la limită.

Din ecuațiile (2) și (3) scrise sub formă operațională (I și I_k sînt transformatele mărimilor i și i_k) rezultă :

$$\frac{dI}{dx} = Kp\frac{d^2U}{dx^2} - CpU \tag{8}$$

și folosind și (6) se obține

$$\frac{dI}{dx} = p(K\gamma^2 - C)\,[A\exp(\gamma x) + B\exp(-\gamma x)], \tag{9}$$

care prin integrare devine

$$I(x, p) = p(K\gamma^2 - C)\left[\frac{A}{\gamma}\exp(\gamma x) - \frac{B}{\gamma}\exp(-\gamma x) + D(p)\right]. \tag{10}$$

Constanta de integrare $D(p)$ se determină înlocuind (10) în (1) și identificînd coeficienții. Rezultă :

$$I(x, p) = \frac{(K\gamma^2 - C)p}{\gamma}\Bigg(A\exp(\gamma x) - B\exp(-\gamma x) - \\ - \frac{L_0}{(L + L_0)\gamma l}\{A[\exp(\gamma l) - 1] + B[\exp(-\gamma l) - 1]\Bigg), \tag{11}$$

respectiv

$$I(x, p) + I_k(x, p) = -\frac{Cp}{\gamma}[A\exp(\gamma x) - B\exp(-\gamma x)] + \\ + \frac{L_0}{L(L + L_0)lp}\{A[\exp(\gamma l) - 1] + B[\exp(-\gamma l) - 1]\}. \tag{12}$$

În cazul cînd sfîrșitul înfășurării este legat la pămînt prin bobină de stingere, condițiile la limită la extremitățile înfășurării, considerînd că la intrarea în înfășurare se aplică treapta unitate de tensiune, sînt :

$$\begin{cases} x = 0, & u(0, t) = 1, \quad U(0, p) = 1, \\ x = l, & u(l, t) = L_s\dfrac{d}{dt}[i(l, t) + i_k(l, t)], \quad U(l, p) = L_s\, p\,[I(l, p) + I_k(l, p)], \end{cases} \tag{13}$$

unde L_s este inductanța bobinei de stingere, considerată drept o mărime constantă dacă se are în vedere că bobina de stingere funcționează în regim nesaturat.

Utilizînd condițiile la limită, soluția (6) a ecuației (5) rezultă de forma :

$$(14)\quad U(x,p)=\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)+\frac{L_sCp^2}{\gamma}\operatorname{ch}\gamma(l-x)-\frac{L_0L_s}{L(L+L_0)l}[\operatorname{sh}\gamma(l-x)+\operatorname{sh}\gamma x]}{\operatorname{sh}\gamma l+\frac{L_sCp^2}{\gamma}\operatorname{ch}\gamma l-\frac{L_0L_s}{L(L+L_0)l}\operatorname{sh}\gamma l}.$$

Din (14) se deduc expresiile pentru repartiția inițială ($t \to 0$) și cvasistaționară ($t \to \infty$) a tensiunii și anume :

$$(15)\quad u(x,0)=\frac{\operatorname{ch}\gamma_0(l-x)}{\operatorname{ch}\gamma_0 l},$$

cu

$$(16)\quad \gamma_0=\sqrt{\frac{C}{K}}$$

și respectiv

$$(17)\quad u(x,\infty)=1-\frac{x}{l}\cdot\frac{1}{1+L_s/(L+L_0)l}$$

3. Considerarea schemei echivalente propuse de Heller, Hlavka și Veverka

Heller, Hlavka și Veverka aduc o importantă corecție schemei echivalente a lui Wagner luînd în considerare inductanțele mutuale între spirele înfășurării. Autorii pleacă de la expresia fluxului comun în spira situată în punctul de coordonată x :

$$(18)\quad \Phi(x)=\int_0^l M(x,z)\,i(z)\,dz,$$

unde : $M(x, z)$ — inductanța mutuală între două spire situate în punctele de coordonate x și z, $i(z)$ — curentul în spira situată în punctul z.

Pe baza rezultatelor obținute pe cale experimentală se arată [3] că funcția $M(x, z)$ poate fi aproximată printr-o exponențială de forma

$$(19)\quad M(x,z)=M_0\exp(-\lambda|x-z|),$$

unde : M_0 este o constantă depinzînd numai de parametrii geometrici și care pentru $x = z$ reprezintă inductanța proprie a unei spire, λ — un număr real și pozitiv, care poate fi determinat pe cale experimentală.

Înlocuind (19) în (18) se găsește

$$\Phi = \frac{w}{l}\int_0^x M_0 \exp\left[-\lambda(x-z)\right] i(z)\,dz + \frac{w}{l}\int_x^l M_0 \exp\left[-\lambda(z-x)\right] i(z)\,dz, \tag{20}$$

cu w — numărul de spire al înfășurării.

Cunoscînd expresia fluxului se poate scrie pentru tensiune, ecuația

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{l}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{21}$$

ecuațiile (2) și (3) rezultate pe baza schemei lui W a g n e r fiind valabile și în cazul acesta.

Din ecuațiile (20), (21), (2) și (3) rezultă ecuația generală diferențială pentru tensiune (în mărimi operaționale):

$$\frac{d^4U}{dx^4} - (\lambda^2 + \lambda MKp^2)\frac{d^2U}{dx^2} + \lambda MCp^2U = 0, \tag{22}$$

a cărei soluție poate fi scrisă sub forma:

$$U(x,\ p) = A_1 \exp(\alpha x) + A_2 \exp(-\alpha x) + A_3 \exp(\beta x) + A_4 \exp(-\beta x), \tag{23}$$

unde

$$\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} = \sqrt{\frac{\lambda^2+\lambda MKp^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda^2+\lambda MKp^2}{2}\right)^2 - \lambda MCp^2}}; \tag{24}$$

A_1, A_2, A_3 și A_4 sînt constante de integrare, iar cu M s-a notat expresia

$$M = 2\left(\frac{w}{l}\right)^2 M_0. \tag{25}$$

Din (23), (2) și (3) se obține soluția pentru curentul i care se substituie în (20) și prin identificarea coeficienților se găsesc următoarele două ecuații, utilizabile în determinarea constantelor de integrare $A_1 \ldots A_4$:

$$\begin{cases} A_1(\lambda-\alpha)\alpha - A_2(\lambda+\alpha)\alpha + A_3(\lambda-\beta)\beta - A_4(\lambda+\beta)\beta = 0, \\ A_1(\lambda+\alpha)\exp(\alpha l) - A_2(\lambda-\alpha)\exp(-\alpha l) + A_3(\lambda+\beta)\exp(\beta l) - \\ \qquad - A_4(\lambda-\beta)\exp(-\beta l) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Folosind și condițiile la limită (13) se obțin încă două ecuații necesare determinării constantelor de integrare. Utilizîndu-le se găsește expresia lui $U(x, p)$ care nu se reproduce în detaliu fiind extrem de complexă. Din această expresie rezultă repartiția cvasistaționară a tensiunii, de forma:

$$u(x,\infty) = \frac{1-2\lambda(l-x)-\exp[-\lambda(l-x)]-\exp(-\lambda l)+\exp(-\lambda x)-2L_s\lambda^2/M}{2\left[1-\lambda l-\exp(-\lambda l)-L_s\lambda^2/M\right]} \tag{27}$$

sau, utilizînd (25), se obține

$$u(x,\infty) =$$

$$(28) \quad = \frac{1-2\lambda\,(l-x)-\exp[-\lambda(l-x)]-\exp(-\lambda l)+\exp\,(-\lambda x)-L_s(\lambda l)^2/w^2M_0}{2[1-\lambda l-\exp\,(-\lambda l)]-L_s(\lambda l)^2/w^2M_0}.$$

Dacă în (28) se efectuează trecerea la limită $L_s \to 0$ rezultă expresia repartiției cvasistaționare în cazul cînd sfîrșitul înfășurării este legat direct la pămînt, expresie identică cu cea obținută în [7] prin altă metodă.

Pentru valorile limită ale lui λ (0 și ∞) expresia (28) devine:

$$(29) \qquad u(x,\infty)_{\lambda\to 0} = 1 - \frac{x}{l}\cdot\frac{1}{1+L_s/w^2M_0},$$

respectiv

$$(30) \qquad u(x,\infty)_{\lambda\to\infty} = 1.$$

În [7] pentru $\lambda \to \infty$ sau $\lambda \to 0$ rezultă o aceeași expresie a repartiției cvasistaționare. Acest fapt este valabil probabil doar în cazul particular în care sfîrșitul înfășurării este legat la pămînt, caz considerat în lucrarea menționată.

Expresia repartiției inițiale rezultă aceeași ca și în paragraful precedent, ceea ce este normal, deoarece repartiția inițială este hotărîtă numai de rețeaua de capacități a schemei echivalente, care a rămas aceeași.

4. Interpretarea rezultatelor și concluzii

Din (15) rezultă că repartiția inițială a tensiunii de-a lungul înfășurării este, în prezența bobinei de stingere, aceeași ca și în cazul în care sfîrșitul înfășurării ar fi izolat (v. de ex. [6]), ceea ce era de așteptat deoarece inductanța bobinei se opune în momentul inițial propagării undei de tensiune. Evident, acest aspect este valabil în cazul în care nu se ia în considerare rețeaua de capacități din schema echivalentă a bobinei. Totuși, chiar și în acest caz, pentru $\gamma_0 l$ suficient de mare (în cazul transformatoarelor de putere $\gamma_0 l > 3$) tensiunea în momentul inițial către capătul înfășurării este practic zero indiferent de faptul dacă sfîrșitul înfășurării este izolat, legat la pămînt direct sau prin bobină de stingere.

Expresiile repartițiilor cvasistaționare obținute pe baza celor două scheme echivalente pot fi socotite identice numai dacă în cazul celei de a doua scheme echivalente se consideră $\lambda = 0$. În acest caz tensiunea se repartizează liniar pe ansamblul înfășurare de transformator—bobină de stingere în raport cu mărimile inductanțelor acestora, sau, mai general, în raport cu impedanțele lor caracteristice.

Cazul $\lambda = 0$ sau practic $\lambda \ll 1$ corespunde unui cuplaj foarte strîns între spirele înfășurării, situație uzuală în cazul bobinelor scurte [6] întîlnite de regulă la transformatoarele de putere.

Pentru $\lambda > 0$, pe de o parte tensiunea nu se mai distribuie liniar de-a lungul înfășurării transformatorului, iar pe de altă parte se modifică și raportul în care tensiunea se repartizează pe ansamblul înfășurare de transformator—bobină de stingere.

Indiferent de valoarea parametrului λ, tensiunea pe neutru în cadrul repartiției cvasistaționare nu depășește valoarea 1, impusă de tensiunea aplicată la intrarea în înfășurarea transformatorului.

Dacă se consideră că amplitudinea maximă a oscilațiilor se obține în momentul inițial (la $t = 0$), atunci aceasta se poate deduce din expresia

$$A_m(x) = u(x, \infty) - u(x, 0),$$

fiind dată deci de diferența dintre repartiția cvasistaționară și cea inițială. Cum această diferență este maximă în cazul cînd sfîrșitul înfășurării e izolat, rezultă că în prezența bobinei de stingere, excluzînd cazul limită $\lambda \to \infty$, amplitudinile oscilațiilor sînt mai mici, deci prezența bobinei de stingere are ca efect reducerea solicitărilor izolației transversale a înfășurării transformatorului, inclusiv a izolației neutrului.

Din aceleași motive, izolația transversală a bobinei de stingere va fi solicitată cel mult (în cazul $\lambda \to \infty$) la nivelul la care este solicitată izolația neutrului transformatorului.

Deoarece în cadrul repartiției inițiale tensiunea către neutru e practic nulă, rezultă că izolația longitudinală a bobinei nu va fi solicitată în regim de impuls.

5. Concluzii

Avînd în vedere constatările de mai sus, rezultă următoarele concluzii mai importante:

a) În prezența bobinei de stingere se reduc solicitările izolației transversale a înfășurării transformatorului, inclusiv a izolației neutrului.

b) Izolația transversală a bobinei de stingere trebuie dimensionată la nivelul izolației neutrului transformatorului.

c) Izolația longitudinală a bobinei de stingere nu este solicitată în regim de impuls.

Primită la 7 mai 1973

Institutul politehnic, Iași
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Wagner K. W., *Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in eine Spule mit Windungskapazität.* E. u. M., 89 (1915).
2. Blume L. F., Boyajian A., *Abnormal Voltages within Transformers.* Trans. AIEE, 577 (1919).
3. Лоханин А. К., *Расчет перенапряжений в катушечных обмотках трансформаторов.* Электричество, 4, 20—34 (1967).
4. Карасев В. А., *Теория электромагнимных процессов в обмомках.* ГЭИ, М.-Л., 1964.
5. Bewley L. V., *Traveling Waves on Transmission Systems.* Chapman a. Hall, London 1951.

6. Heller B., Veverka A., *Les phénomènes de choc dans les machines électriques.* Dunod, Paris, 1963.

7. Gavrilaş N., Wohlmuth F., *Kvazista ionární rozložení napetí podél vinutí transformátoru pri napet'ovem rázu.* Elektrotechnický obzor, 7, 339 (1962).

DER EINFLUß DER LÖSCHSPULE IM STERNPUNKT DES TRANSFORMATORS ÜBER DIE ISOLATIONSBEANSPRUCHUNGEN DIESER WICKLUNGEN BEI STOßSPANNUNG

(Zusammenfassung)

Es wird die Anfangs- und Quasistationärespannungsverteilung längs der Transformatorwicklung in den Fall des mittels Petersen Spule geerdeten Sternpunkt bestimmt. Dafür wird es das von der Literatur bekanntes Ersatzschaltbild gebraucht.

Es folgen als Abschluße daß:

a) Die Beanspruchungen der Querisolation, einschließlich der Sternpunktisolation vermindern sich in die Gegenwärt der Löschspule.

b) Die Festigkeiten der Querisolation der Löschspule mit der Sternpunktisolation müssen gleich sein.

c) Die Längsisolation der Löschspule ist nicht beansprucht beim Auftreten von Stoßspannung.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secţia III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUŢOMAŢIZĂRI.

C. Z. 628.9: 621.310.7

POSIBILITĂŢI DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME DE ILUMINAT PE BAZA ANALOGIEI CU CÎMPUL ELECTROSTATIC *)

DE

RADU FLORESCU

1. Introducere

Un proces fizic poate fi caracterizat de expresia sa matematică scrisă într-un anumit sistem de coordonate. Această expresie este de obicei o ecuaţie care stabileşte o legătură între parametrii procesului şi parametrii sistemului.

Există cazuri cînd ecuaţii identice ca formă descriu fenomene de natură fizică diferită. Aceste corespondenţe sînt studiate prin similitudinea matematică [1].

Deoarece aceleaşi ecuaţii au aceleaşi soluţii, înseamnă că studiul unei probleme conduce la obţinerea unei cantităţi de informaţie precisă despre soluţiile altor probleme descrise de aceeaşi ecuaţie.

2. Analogia între iluminarea dată de către un izvor de lumină punctiform simetric şi cîmpul electrostatic al unei sarcini electrice punctiforme

a) Intensitatea cîmpului electrostatic creeat de către o sarcină electrică punctiformă q, într-un punct N, pe direcţia (d) (fig. 1) este dată de relaţia [2], [3]:

$$E_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0 . \mathbf{d}_0 , \tag{1}$$

în care: ε_0 — permitivitatea vidului, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{d}_0$ — vectori unitate.

Iluminarea realizată de către un izvor electric de lumină punctiform, cu simetrie sferică, de flux luminos φ, într-un punct N al unui plan (P) (fig. 2) este dată de relaţia:

---

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică „60 ani de învăţămînt electrotehnic în Iaşi", 21—23 decembrie 1972.

(2) $$e_p = \frac{\Phi}{4\pi h^2} \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{n}_{0p},$$

în care $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{n}_{0p}$ — vectori unitari.

b) Intensitatea cîmpului electric creeat de către un fir rectiliniu infinit, încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină ρ_l (fig. 3), este:

(3) $$E_d = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

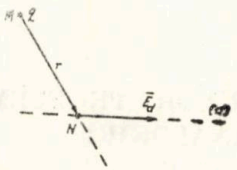


Fig. 1

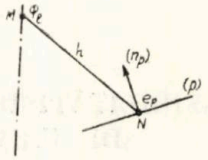


Fig. 2

Iluminarea realizată de către o fîșie luminoasă, infinită, pe un plan orizontal, avînd densitatea liniară de flux Φ_l (fig. 4), este:

(4) $$e_p = \frac{\Phi_l}{2\pi h}.$$

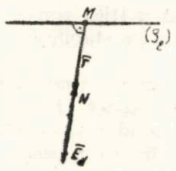


Fig. 3

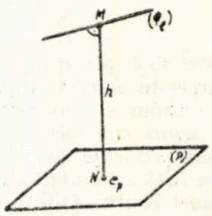


Fig. 4

Ecuația (1), respectiv (3), este similară cu ecuația (2), respectiv (4), între parametrii lor existînd următoarele corespondențe prin analogie:

(5) $$\begin{cases} E_d \Leftrightarrow e_p, \quad q \Leftrightarrow \Phi, \quad \rho_l \Leftrightarrow \Phi_l, \\ r \Leftrightarrow h, \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}_0 \Leftrightarrow \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{n}_{0p} \quad \varepsilon_0 \Leftrightarrow 1. \end{cases}$$

Conform principiului enunțat în introducere, similitudinea matematică a ecuațiilor (1) ⇔ (2) și (3) ⇔ (4) permite aplicarea unor rezultate obținute în electrostatică la soluționarea unor probleme de iluminat.

3. Problema uniformității iluminării

Pornind de la studiul uniformității cîmpului electric al unei grile formată din fire încărcate, se va rezolva problema determinării raportului între înălțimea de suspendare a izvoarelor de lumină și distanța dintre

șirurile de lămpi, în cazul unei instalații de iluminat prevăzută cu șiruri continue de lămpi fluorescente.

În fig. 5 sînt prezentate, în secțiune, o grilă electrică și suprafețele echipotențiale corespunzătoare.

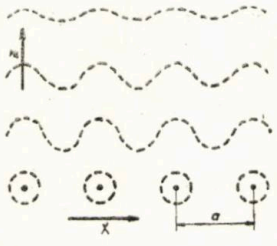


Fig. 5

În general, o problemă de electrostatică se poate rezolva pe baza a două ecuații [2]:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

și

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right), \tag{7}$$

în care: V — potențialul electric, ρ_V — densitatea volumetrică de sarcină.

Analizînd fig. 5 se constată că dacă a este mult mai mare decît diametrul unui fir, potențialul electric poate fi descris cu o bună aproximație de o ecuație de forma [2]:

$$V(x, z) = V_0 + F(z)\cos\frac{2\pi x}{a}, \tag{8}$$

în care V_0 reprezintă componenta continuă.

Funcția (8) trebuie să satisfacă condiția lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Rezolvînd această ecuație se obține:

$$F(z) = A\,e^{-2\pi z/a}. \tag{10}$$

Constanta A se va determina impunînd o condiție la limită.

Expresia (8) va avea forma:

$$V(x, z) = -E_0 z + Ae^{-2\pi z/a} \cos \frac{2\pi x}{a}, \tag{11}$$

în care E_0 constituie componenta continuă a cîmpului creeat de grilă [2].

Intensitatea cîmpului pe o direcție normală la planul grilei se poate calcula conform relației (7) cu expresia

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = E_0 + \frac{2\pi}{a} Ae^{-2\pi z/a} \cos \frac{2\pi x}{a}. \tag{12}$$

Uniformitatea cîmpului la o anumită distanță z de planul grilei se poate aprecia prin mărimea:

$$\Delta E_z = E_{\max z} - E_{\min z} = \frac{4\pi}{a} Ae^{-2\pi z/a}. \tag{13}$$

La limită, pentru $z = 0$, pe suprafața unui fir, rezultă [2], [3]:

$$\Delta E_0 = E_{\max 0} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2\pi}{a} A, \tag{14}$$

unde: R — raza unui conductor din grilă, $\rho_l = q/l$ — densitatea liniară de sarcină, l — lungimea de conductor corespunzătoare sarcinii q.

Din relația (14) se obține:

$$A = \frac{\rho_l a}{4\pi^2 \varepsilon_0 R} \tag{15}$$

și introducînd în (13):

$$\Delta E_z = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0 R} e^{-2\pi z/a}. \tag{16}$$

Pentru rezolvarea problemei de iluminat propuse este suficient să se aplice relațiile de similitudine (5), expresiei (16). Se va obține:

$$\Delta e = e_{\max z} - e_{\min z} = \frac{\Phi}{\pi l R} e^{-2\pi z/a}, \tag{17}$$

în care: l — lungimea unei lămpi, R — raza unei lămpi, z — distanța dintre planul lămpilor și planul în care se calculează iluminarea, a — distanța dintre două șiruri de lămpi.

Impunînd o anumită valoare a uniformității iluminării, $K = \Delta e = e_{\max z} - e_{\min z}$, se poate determina raportul z/a corespunzător:

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Phi}{\pi K l R}. \tag{18}$$

În mod similar se poate rezolva și problema în cazul instalațiilor de iluminat prevăzute cu corpuri de iluminat cu distribuție largă, echipate cu lămpi incandescente și dispuse într-un singur șir (fig. 6). În acest caz relația (14) se va înlocui cu [2], [3]:

$$\Delta E_0 = E_{\max_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} = \frac{2\pi A}{a}. \tag{19}$$

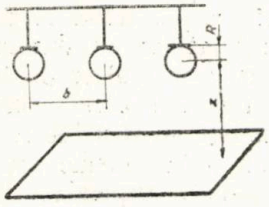


Fig. 6

În final se obțin expresiile:

$$\Delta e = e_{\max z} - e_{\min z} = \frac{\Phi}{2\pi R^2} e^{-2\pi z/b}, \tag{20}$$

$$\frac{z}{b} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Phi}{2\pi K R^2}. \tag{21}$$

4. Exemple de calcul

a) Se consideră o instalație de iluminat realizată cu șiruri de lămpi fluorescente cu corpuri de iluminat deschise, avînd următoarele date de calcul [4], [5]:

$E_{med} = 300$ lx, $\Phi = 2\,000$ lm, $l = 1{,}2$ m, $R = 0{,}02$ m, $E_{med}/E_{max} = 0{,}9$.

Aplicînd relația (17) se obține:

$$\frac{z}{a} = 0{,}99.$$

b) Se consideră o instalație de iluminat realizată cu globuri din sticlă opalină, echipate cu lămpi cu incandescență, așezate ca în fig. 6 [4], [5], cu următoarele date:

$E_{med} = 100$ lx, $\Phi = 1\,000$ lm, $R = 0{,}1$ m, $E_{med}/E_{max} = 0{,}9$.

Aplicînd relația (20) se obține:

$$\frac{z}{b} = 1{,}05.$$

5. Concluzii

1. Din relațiile (17), (18) și (20), (21) se constată că uniformitatea iluminării crește cu scăderea rapoartelor $\Phi/\pi KlR$ și a/z respectiv $\Phi l/2\pi KR^2$ și b/z.

2. În cazul instalațiilor considerate se pot obține uniformități ridicate pentru distanțe între șirurile de lămpi sau între lămpi, comparabile ca mărime cu înălțimea de calcul (z).

3. Valorile obținute pentru rapoartele z/a și z/b sînt apropiate de cele indicate în literatură [4], [5].

4. Relațiile (18) și (21) se pot folosi în calculele de proiectare pentru determinarea geometriei instalațiilor de iluminat în funcție de uniformitatea impusă a iluminării. Relația (18) se poate aplica în cazul încăperilor lungi de înălțime mică sau medie în care se instalează șiruri de lămpi fluorescente în corpuri de iluminat cu distribuție largă. Relația (21) se poate utiliza în cazul străzilor cu lățime medie sau mică, iluminate cu corpuri de iluminat cu distribuție largă, suspendate la înălțimi mici sau mijlocii.

Primită la 10 aprilie 1973

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări și automatică

BIBLIOGRAFIE

1. Venikov V. A., *Aplicarea teoriei similitudinii și modelării în electroenergetică*, (trad. din l. rusă). Ed. Tehn. Buc., 1972.
2. Feynman R., *Fizica modernă*. Vol. II, Ed. Tehn., Buc., 1970, cap. IV și XXII.
3. Timotin Al. ș. a., *Lecții de Bazele electrotehnicii*. EDP, Buc., 1970, Cap. 3.
4. Prisăcaru V., Huțanu C., Ioachim D., *Utilizările energiei electrice*. EDP, Buc., 1969.
5. Băilescu Al., Savopol D., *Iluminatul electric. Îndreptar*. Ed. Tehn., Buc., 1969.

SUR LES POSSIBILITÉS DE RÉSOUDRE CERTAINS PROBLÈMES D'ÉCLAIRAGE, À PARTIR DE L'ANALOGIE AVEC LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

(Résumé)

On présente, à partir de la théorie de similitude mathématique, l'analogie qui existe entre des charges électriques ponctuelles ou linéaires et des sources électriques de lumière, ponctuelles ou linéaires. On trouve des relations de calcul pour l'uniformité de l'éclairage sur un plan, produit par des sources ponctuelles on linéaires, compte tenu de la distance entre les lampes, ou rangées de luminaires et de l'hauteur des sources par rapport au plan d'utilisation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XIX (XXIII), fasc. 3—4, 1973
Secția III
ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ. AUTOMATIZĂRI.

RECENZII

BOOK REVIEWS РЕЦЕНЗИИ

UNBEHAUEN R., *Synthese elektrischer Netzwerke*. R. Oldenbourg Verlag, München—Wien, 1972, 365 S.

Das rezensierte Buch, basiert auf einer bemerkenswerten Beschäftigung über einen Zeitraum von mehr als fünfzehn Jahren, hat als Zweck jenen Teil dieses Gebietes, welcher große praktische Bedeutung präsentiert und welcher als Grundlage für weitergehende wissentschaftliche Forschungen dienen kann, darzustellen.

Das Buch enthält drei Teile.

Der erste Teil (236 Seiten) ist der Synthese von passiven Netzwerken gewidmet. Es wird die Charakterisierung von Zweipolen und Zweitoren, die Ohmischenwiderständen (R), Induktivitäten (L), Kapazitäten (C) und Übertragern ($\ddot{U}$) enthalten, sowie der Realisierung von Netzwerkcharakteristiken (Zweipolfunktionen, Übertragungsfunktionen, Netzwerkmatrizen) durch passiven Netzwerke behandelt. Bemerkenswert ist daß es dem Verfasser die verschiedene Syntheseverfahren der Reaktanzzweitoren einheitlich darzustellen, so daß derer Realisierung jeweils von der Eingangsbetriebimpedanz ausgeht gelang. Ein besonderen Platz im ersten Teil ist der Synthese von *RC*-Zweitoren, wegen ihrer großen Bedeutung für die aktive *RC*-Synthese, gewidmet.

Im zweiten Teil (56 Seiten) behandelt der Verfasser die Synthese von aktiven *RC*-Netzwerken. Als aktive Elemente werden Negativ-Impedanz-Konverter, Gyratoren und Verstärker verwendet.

Der dritte Teil (51 Seiten) beschäftigt sich mit der Approximationsprobleme in der Synthese elektrischer Netzwerke und zwar mit der erforderlichen Ermittlung von Netzwerkcharakteristiken aufgrund bestimmter Forderungen im Frequenzbereich oder Zeitbereich. Die verschiedenen Verfahren, die für Lösung der Approximation zur Verfügung stehen, wurden nach der Art der Zugrundgelegten Vorschrift geordnet.

Der deutliche und bündige Stil ermöglicht den Studenten und Ingenieure, die die üblichen Kentnisse in Grundlagen der Elektrotechnik und Mathematik besitzen, ohne Schwierigkeiten den Stoff des Buches zu verstehen und es für Einführung oder Forschung im Gebiete der Synthese von elektrischen Netzwerke zu benützen.

* * *

Cartea recenzată, bazată pe o activitate remarcabilă în domeniul sintezei rețelelor electrice, prezintă acea parte din acest domeniu, care are o mare importanță practică și care poate fi folosită ca fundament pentru cercetări ulterioare.

Stilul clar și concis face ca această carte să poată fi folosită cu succes de studenți și ingineri, pe baza cunoștințelor de Bazele electrotehnicii și matematică din facultate, atît în activitatea didactică cît și în cea de cercetare științifică.

N. Zitron

BHATIA N. P., SZEGÖ G. P., *Stability Theory of Dynamical Systems.* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New-York, 1970.

The book contains a systematic exposition of the elements of the theory of dynamical systems in metric spaces with emphasis on the stability theory and its application in mathematics, physics and engineering, including most of the important new results of the past 20 years.

The book has 9 chapters: Dynamical Systems, Elementary Concepts, Recursive Concepts, Dispersive Concepts, Stability Theory, Flow near a Compact Invariant Set, Higher Prolongations, C^1 - Lyapunov Functions for Ordinary Differential Equations, Noncontinuous Lyapunov Functions for Ordinary Differential Equations.

The extensive bibliography at the end should enhance the usefulness of the book to those interested in the further exploration of the subject.

M. Voicu

TAYLOR A. W. B., *Superconductivity.* Wykeham publ., London, LTD, 1970 (102 pp. 63 fig.).

Il y a déjà longtemps que les éditions Wykeham font paraître des ouvrages à caractère d'introduction aux domaines d'avantgarde de la science (Wykeham Science Serie) et d, la technique (Wykeham Technological Serie), ouvrages écrits par des spécialistes compétente et réputés. C'est parmi ces excellents ouvrages qu'on remarque *Superconductivity*, appartenant à la série Science.

L'auteur, professeur de physique à l'Université de Liverpool, se propose — et c'est une réussite — d'introduire le lecteur à la connaissance du phénomène de superconductivité, de même qu'à ses modernes et intéressantes applications.

Les chapitres 1 *(État superconducteur)* et 5 *(Nature de l'état superconducteur)* décrivent qualitativement et quantitativement l'état de superconductibilité, tout en présentant les principaux métaux et alliages superconducteurs ; on y présente aussi les conséquences de l'état superconducteur sur la résistivité électrique, la conductivité thermique, la chaleur spécifique et son effet thermoélectrique.

Dans le deuxième chapitre *(Propriétés magnétiques de l'état superconducteur)*, après avoir analysé l'influence du champ magnétique sur les corps massifs (effet Meissner) et sur les couches minces superconductrices, l'auteur s'occupe des applications se basant sur cette influence, dont aussi „la pompe à flux magnétique" (destinée à comprimer ou bien à éliminer le flux magnétique).

Dans les derniers chapitres (3 et 4) l'auteur distingue deux types de matériaux superconducteurs : le Ier type (d'habitude métaux simples), où l'état superconducteur se manifeste uniformément et le passage de l'état normal à l'état superconducteur se produit brusquement, et le IIe type (certains alliages découverts après 1962), ou la superconductivité se manifeste discrètement (sous forme de petits tubes) dans la masse de l'alliage respectif. En tant qu'applications du premier type on décrit la soupape de chaleur (réfrigérateurs superconducteurs), le bolomètre superconducteur, le cryotron (à bobine et couches minces croisées) et la cellule à mémoire ; en ce qui concerne le deuxième type, on décrit le solenoïde et respectivement l'aimant permanent supercondueteur, de même que le picoteslamètre basé sur l'effet Josephson.

On ne décrit pas les applications du domaine des câbles de force, superconducteurs, en exploitation depuis plusieurs années déjà ; aucune référence bibliographique n'y est mentionnée.

Le style concis, clair et attrayant, les démonstrations intuitives, réduisant l'appareil mathématique au minimum possible, permettent au lecteur d'avoir un aperçu clair sur le phénomène de la superconductivité de même que sur ses applications dans la technique moderne.

M. Antoniu

MOERDER C., *Transistor Rechenpraxis.* Bd. 2, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 1970, (182 S, 85 Abb.).

Nachdem der Verfasser in dem ersten Band (*Transistor Rechenpraxis*, Bd. 1, R. V. Decke's Verlag, G. Schenk, Hamburg—Berlin, 1962), den Aufbau und die Grundlagen des Transistors und dessen wichtigste Anwendungen in Hochfrequenzkreisen beschreibt, etwickelt er in dem vorliegenden Buch eine interessante und originale Reichenmethodik der in den elektronischen Schaltungen der Messtechnik und der automatischen Steuerung oft verwendeten transystorisierten Kreise.

In dem ersten Teil der Arbeit (43 S.) werden Parameter des Transistors, als Vierpol betrachtet, und nützliche Anweisungen hisichtlich der Wahl dieser Parameter, um den in der Praxis angestrebten Sinn erreichen, gegeben.

In dem zweiten und dritten Teil (86 S.) werden zwei Rechenmethoden — die Matrizenmethode und die Methode des Gegenkopplungsgrade — für transistorierte Gegenkopplungskreise, vorgeführt, wobei auch viele Anwendungsbeispiele dieser Kreise in den Versterker- und Stabilisierungsstufen der integrierten Schaltkreise der modernen automatischen Steuerung, angeführt werden.

In den letzen beiden Teilen (21 S.) werden viele Rechenbeispiele der in der letzen Zeit oft verwendeten transistorisierten Schaltkreisen vorgeführt und wichtige Anweisungen betreffend die thermische Kompensation, die Stabilisierung des Betriebszustandes und die Verkleinerung oder Beseitigung der Nullpunktdrifft, gegeben.

Die 11 Tafeln, die Formeln und Rechendaten enthalten, ergänzen dieses wertvolle und moderne Buch glänzend.

Das Buch empfehlen wir dringend sowohl den Studenten als auch den Elektronik- und Nichtelektronikingenieuren.

M. Antoniu

MOERDER C., *Quotienten- und Produktanzeigeräte.* R. V. Decker's Verlag, G. Schenk, Hamburg—Berlin (155 S., 82 Abb.)

Die Quotienten- und Produktanzeigergeräte spielen in den Mess- und Automatisierungsanlagen eine wichtige Rolle. Obwohl es in der Fachliteratur einige Arbeitein gibt die dieses Gebiet behandeln, machte sich das Fehlen einer einheitlichen Behandlung dieses Problems bemerkbar. Der Verfasser hat diese Frage, in dem hier besprochenen Buch, mit hoher Kompetenz beantwortet.

Der erste Teil des Buches (131 S.) behandelt die Möglichkeiten in der Messtechnik und automatischen Steuerung. Es werden zwei konstruktive varianten vorgeführt — mit Drehspulen und mit Drehmagnet. In beiden Situation wird der Betrieb mit endlichen und unendlichen Messgrenzen analysiert. Für die wichtigsten Anwendungen in der Praxis wird jedesmal eine Gesamtanalyse des ganzen Messystems (Messwerk + Messkreis) gemacht, wobei Folgerungen betreffend die Empfindichkeit, Genauigkeit und die Wirksamkeit des Systems aufgestellt werden.

In dem zweite Teil werden die wichtigsten Vorrichtungen die bei der Multiplikation zweier Grössen in der Messtechnik mitwirken (wattmeterische Messvorrichtungen H a l l generatoren), beschreiben.

Das Buch ist in einem exakten und umfassenden Stil geschrieben, es enthält viele einleuchtende Zeichnungen, Bilder und numerische Beispiele, wodurch es, trotzdem die heutige Technik schon einen Schritt weiter ist, zu einer nützlich Dokumentation, sowohl Fachleute als auch für Studenten in der Fortbildung, wird.

M. Antoniu

FROHNE H., *Einführung in die Elektrotechnik.* Bd. 1, B.G. Teubner, Stuttgart, 1970 (128 S.); Bd. 3, B. G. Teubner, Stuttgart, 1971 (197 S.).

Der erste Band behandelt die allgemeinen Grundlagen. Zu erst werden die Maßsysteme betrachtet mit dem Ziel, einen Einblick in ihre Entstehung und ihren Zusammenhang zu vermitteln. Daneben werden ausführlicher die Definitionen physikalischer Grössen und Gleichungen untersucht.

Die Definitionen der elektrischen Grössen und deren Verknüpfungen, die Methoden zur Berechnung elektrischer Netzwerke sowie die Zweipoltheorie werden für Gleichstrom erläutert.

Der dritte Band analysiert die Wechselstromlehre. Es wird erläutert, daß die erzeugenden Gleichungen für den Sonderfall zeitlich sich sinusförming änderender Grössen mit Hilfe der komplexen Rechnung gelöst werden kann.

Die Vorgänge in elektrischen Schwingkreis werden betont aus der Sicht der auftretenden Energiependulengen geklärt, da die Energieumspeicherung das allen Schwingungsformen gemeinsame und somit das physikalische Wessen der Schwingung charakterisierenden Phänomen ist. Der dritte Band schliesst mit der Untersuchung der Mehrphasensysteme.

Die Skripten *Einführung in die Elektrotechnik* fassen das für das Fachstudium der Elektrotechnik notwendige Präsenzwissen zusammen.

N. Zitron

HELKE H., *Messbrücken und Kompensatoren für Wechselstrom*. R. Oldenbourg Verlag, München—Wien, 1971.

Die Ausgabe des Buches von Herrn H. Helke stellt eine moderne Verarbeitung des berühmtes Bandes *Messbrücken und Kompensatoren* dar, der von J. Krönert in Jahre 1935 geschrieben wurde.

In den ersten zwei Kapiteln (ungefähr 75% des Buchinhaltes) behandelt man systematischerweise alle von Krönert zu seiner Zeit bekannten Wechselstrom-Messbrücken und -Kompensatoren als auch jene die nachher bis heute entdeckt worden sind.

Schliesslich werden in den übrigen drei Kapiteln die Hilfsprobleme der Wechselstrom-Messbrücken und -Kompensatoren beschrieben und zwar: Messkonverter Wechselstrom-Gleichstrom (die sogenannte „transfer-techniques" in anglo-sächsischer Fachliteratur), Stromquellen (insbesonders konstantgehaltene) und Nullindikatoren. Man erkennt hier die Modernisierung durch den vorragenden Beitrag, der, mittels der Anwendung der Halbleiterglieder, gebracht wird.

Dokumentarisch, anziehend, ordentlich und streng geschrieben gelingt es dem Buch dem Leser (Studenten, Fachmann, Forscher) in allen Problemen die die Anwendung der Wechselstrom-Messbrücken und -Kompensatoren betreffen, eine ausgezeichnete Antwort zu geben.

P. Pogângeanu

Nr. coli tipar 13

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică Iași, Str. Vasile Alecsandri nr. 6, sub cd. nr. 509
Republica Socialistă România

1974 AUG 09

40822